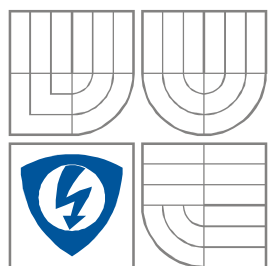


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ**

**ÚSTAV TEORETICKÉ A EXPERIMENTÁLNÍ
ELEKTROTECHNIKY**

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND
COMMUNICATION

DEPARTMENT OF THEORETICAL AND EXPERIMENTAL
ELECTRICAL ENGINEERING

VÝPOČET OKAMŽITÉHO KMITOČTU

ESTIMATION OF INSTANTANENOUS FREQUENCY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

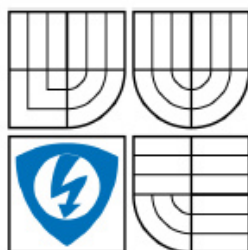
Šimon Mik

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Radek Kubásek, Ph.D.

BRNO, 2009



VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

Ústav radioelektroniky

Bakalářská práce

bakalářský studijní obor
Elektronika a sdělovací technika

Student: Šimon Mik

Ročník: 3

ID: 72906

Akademický rok: 2008/2009

NÁZEV TÉMATU:

Výpočet okamžitého kmitočtu

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Proveďte literární rešerši zabývající se výpočtem okamžitého kmitočtu reálných a komplexních signálů.

Zpracujte přehled používaných metod a zhodnoťte jejich vlastnosti z hlediska přesnosti a časového rozlišení. Implementujte zvolené metody v programovém prostředí MATLAB.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] KWOK, H. K. Improved instantaneous frequency estimation using adaptive short-time fourier transform. Disertační práce, 1993.

[2] FERTIG L. B., MCCLELLAN J. H., Instantaneous frequency estimation using linear prediction with comparisons to the DESAs, Signal Processing Letters, 1996, vol.2, no. 3, 1996, p. 54-56.

Termín zadání: 9.2.2009

Termín odevzdání: 5.6.2009

Vedoucí práce: Ing. Radek Kubásek, Ph.D.

prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida
Předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

ABSTRAKT

V bakalářské práci jsou popsány algoritmy, které je možno použít k výpočtu okamžitého kmitočtu. Následně jsou uvedeny závěry, ke kterým se došlo po implementaci uvedených algoritmů do programu Matlab. Metody jsou porovnávány ze dvou hledisek. Prvním hlediskem je přesnost metod v závislosti na časovém průběhu vstupního signálu. Druhým hlediskem je přesnost metod v závislosti na poměru kmitočtu a vzorkovacího kmitočtu vstupního signálu.

Cílem této práce je zhodnocení jednotlivých metod a posouzení, která metoda vykazuje nejlepší vlastnosti.

KLÍČOVÁ SLOVA

Výpočet okamžitého kmitočtu, algoritmus DESA, Pronyho metoda, modifikovaná kovariance, analytický signál, numerická derivace.

ABSTRACT

This bachelor's thesis describes different instantaneous frequency estimators. Various methods are implemented into Matlab software and there are introduced conclusions of testing. Methods are compared in two aspects. The first aspect is accuracy of method which depend on time progress input signal. The second aspect is accuracy of method which depend on ratio frequency of input signal and sampling frequency. Outcomes of tests are compared.

The result of this work is evaluate properties each method.

KEYWORDS

Estimation of instantaneous frequency, DESA algorithm, Prony's method, modified covariance, analytical signal, numerical derivation.

MIK, Š. *Výpočet okamžitého kmitočtu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Ústav teoretické a experimentální elektrotechniky, 2009. 33 s. Bakalářská práce. Vedoucí práce: Ing. Radek Kubásek, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma Výpočet okamžitého kmitočtu jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne

.....

(podpis autora)

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Radku Kubáskovi, Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne

.....

(podpis autora)

OBSAH

Seznam obrázků	vii
Seznam tabulek	viii
1 Úvod	1
2 Okamžitý kmitočet	2
2.1 Analytický signál a jeho vlastnosti	2
2.2 Hilbertova transformace	3
3 Výpočet okamžitého kmitočtu	5
3.1 Výpočet založený na derivaci fáze analytického signálu	5
3.1.1 Numerická derivace	6
3.2 Nelineární metody výpočtu okamžitého kmitočtu.....	7
3.2.1 DESA - the discrete energy separation algorithm (diskrétní algoritmus separace energie).....	7
3.2.2 Aplikace pronyho metody.....	8
3.2.3 Metoda modifikované kovariance	8
4 Vlastnosti jednotlivých metod, implementace do matlabu	10
4.1 Časové rozlišení metod.....	10
4.2 Chyby metod pro kmitočty v rozsahu od nuly do poloviny f_{vz}	17
5 Výpočet okamžitého kmitočtu signálů s přidaným šumem.	20
5.1 Náhodná veličina, normální rozdělení	20
5.2 Implementace zašuměných signálů do Matlabu	21
5.2.1 Chyby metod pro zašuměný signál s kmitočty v rozsahu od nuly do poloviny f_{vz}	23
5.2.2 Chyby metod pro zašuměný signál s konstantním kmitočtem a různou směrodatnou odchylkou šumu.	23
5.2.3 Časový průběh výpočtu okamžitého kmitočtu zašuměných signálů ..	25
6 Závěr	31
Literatura	32
Seznam symbolů, veličin a zkratk	33

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 2.1: Analytický signál a jeho vlastnosti, obrázek převzat z [3].....	3
Obr. 3.1: a)Fáze vypočtená z analytického signálu, b)Fáze po úpravě (rozbalení) pomocí funkce <code>unwrap(fi)</code>	6
Obr. 4.1 (vlevo): Testovací signál $s_1(n)$ a jeho okamžitý kmitočet.	10
Obr. 4.2 (vpravo): Testovací signál $s_2(n)$ a jeho okamžitý kmitočet.	10
Obr. 4.3 (vlevo): Testovací signál $s_3(n)$ a jeho okamžitý kmitočet.	11
Obr. 4.4 (vpravo): Testovací signál $s_4(n)$ a jeho okamžitý kmitočet.	11
Obr. 4.5: Grafy odchylek pro testovací signál $s_1(n)$	13
Obr. 4.6: Grafy odchylek pro testovací signál $s_2(n)$	14
Obr. 4.7: Grafy odchylek pro testovací signál $s_3(n)$	15
Obr. 4.8: Grafy odchylek pro testovací signál $s_4(n)$	16
Obr. 4.9: Závislost středních kvadratických odchylek na kmitočtu pro metody:	18
Obr. 4.10: Závislost odchylky na kmitočtu mod. kovarianční Metoda (5bodů).....	19
Obr. 5.1: Hustota normálního rozdělení pravděpodobnosti.....	21
Obr. 5.2: Závislost středních kvadratických odchylek na kmitočtu pro metody:	22
Obr. 5.3: Zašuměný testovací signál $s_5(n)$ (konstantní kmitočet).....	27
Obr. 5.4: Okamžitý kmitočet signálu $s_5(n)$ vypočtený metodami:	27
Obr. 5.5: Zašuměný testovací signál $s_6(n)$ (se skokem okamžitého kmitočtu).....	28
Obr. 5.6: Okamžitý kmitočet signálu $s_6(n)$ vypočtený metodami:	28
Obr. 5.7: Zašuměný testovací signál $s_7(n)$ (s rostoucím kmitočtem).....	29
Obr. 5.8: Okamžitý kmitočet signálu $s_7(n)$ vypočtený metodami:	29
Obr. 5.9: Zašuměný testovací signál $s_8(n)$ (s rostoucím/klesajícím kmitočtem)	30
Obr. 5.10: Okamžitý kmitočet signálu $s_8(n)$ vypočtený metodami:	30

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Vzorce pro výpočet okamžitého kmitočtu, tabulka převzata z [1]	9
Tabulka 2: Maximální hodnoty střední kvadratické chyby	19
Tabulka 3: Závislost odchylek výpočtu na velikosti šumu: DESA1 4b, Mod. Kovariance 4b, Prony 4b	24
Tabulka 4: Závislost odchylek výpočtu na velikosti šumu: DESA1 5b, DESA2 5b, Mod. Kovariance 5b	24
Tabulka 5: Závislost odchylek výpočtu na velikosti šumu: Prony 5b, Derivace 2b, Derivace 3b + derivace 5b	25

1 ÚVOD

Výpočet okamžitého kmitočtu reálných, popřípadě komplexních signálů má velký význam v mnoha oborech, které se zabývají zpracováním signálů. Tato práce ukazuje různé postupy, které můžeme použít, k přesnému a rychlému výpočtu okamžitého kmitočtu. Nejprve jsou jmenovány různé metody výpočtu okamžitého kmitočtu, je popsáno jejich odvození a uveden jejich výpočetní algoritmus. Následuje implementace všech odvozených algoritmů do programu Matlab, který umožňuje pozorovat, jak se jednotlivé metody chovají. Cílem této práce je zhodnocení jednotlivých metod a posouzení, která metoda má nejlepší vlastnosti.

Algoritmy pro výpočet okamžitého kmitočtu jsou posuzovány podle přesnosti výpočtu, a efektivnosti výpočtu (výpočetní náročnosti algoritmu). Přesnost metod je sledována na dvou parametrech. První možností je výpočet odchylek okamžitého kmitočtu signálů s časově proměnným kmitočtem. V práci jsou uvedeny odchylky metod při výpočtu okamžitého kmitočtu signálů: s konstantním kmitočtem, s plynule se měnícím kmitočtem a skokově se měnícím kmitočtem. Druhou možností je posouzení přesnosti metod v závislosti na poměru kmitočtu signálu a vzorkovacího kmitočtu, a to v rozmezí od nuly do poloviny vzorkovacího kmitočtu. Přesnost jednotlivých metod podle obou uvedených kritérií je podrobena pozorování i pro signály zkreslené Gaussovským šumem. Jsou uvedeny metody, které jsou proti šumu nejodolnější.

2 OKAMŽITÝ KMITOČET

Kmitočet, nebo-li frekvence, je fyzikální veličina, která udává počet opakování periodického děje za jednotku času. V elektrotechnických oborech se většinou pojem kmitočet spojuje se střídavým signálem. Pod tímto pojmem může být obsažena hodnota proudu, napětí, či jiné veličiny. Pokud se hodnota kmitočtu v čase mění, lze zavést pojem okamžitý kmitočet. Okamžitý kmitočet je jedna z možností, jak popsat obecný analogový nebo digitální signál v čase. Podobně, jako například okamžitá fáze nebo okamžitá amplituda. Určení okamžitého kmitočtu je důležité v mnoha aplikacích, například v komunikačních systémech, ve zpracování řeči, v měření fyzikálních veličin a jiných. Aby pojem okamžitý kmitočet mohl být definován matematicky, je třeba nejprve vysvětlit pojem analytický signál.

2.1 Analytický signál a jeho vlastnosti

Analytický signál $x_a(t)$ je součtem reálného signálu $x(t)$ a jeho Hilbertova obrazu $\tilde{x}(t)$ [2], [3]. Signál $\tilde{x}(t)$ má každou svoji kmitočtovou složku fázově zpožděnou o $\pi/2$ oproti $x(t)$. Dvojici $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ lze označit za transformační (Hilbertův) pár. Okamžitá hodnota analytického signálu je tedy komplexní číslo, jehož imaginární složka je Hilbertovým obrazem složky reálné.

$$x_a(t) = x(t) + j\tilde{x}(t), \quad (2.1)$$

$$\tilde{x}(t) = H\{x(t)\} . \quad (2.2)$$

$x_a(t)$analytický signál,
 $x(t)$reálný signál,
 $\tilde{x}(t) = H\{x(t)\}$ Hilbertův obraz $x(t)$.

Tato definice má jednoduché vysvětlení v kmitočtové oblasti. Tam vypadá spektrum X_a tak, že jsou odstraněny všechny jeho spektrální složky na záporných kmitočtech. Stejnoseměrná složka zůstane stejná, jako u původního reálného signálu $x(t)$ a kladným složkám se hodnota kmitočtu zdvojnásobí:

$$X_a(\omega) = 0 \quad \text{pro } \omega < 0 ,$$

$$X_a(\omega) = X(0) \quad \text{pro } \omega = 0 ,$$

$$X_a(\omega) = 2X(\omega) \quad \text{pro } \omega > 0 .$$

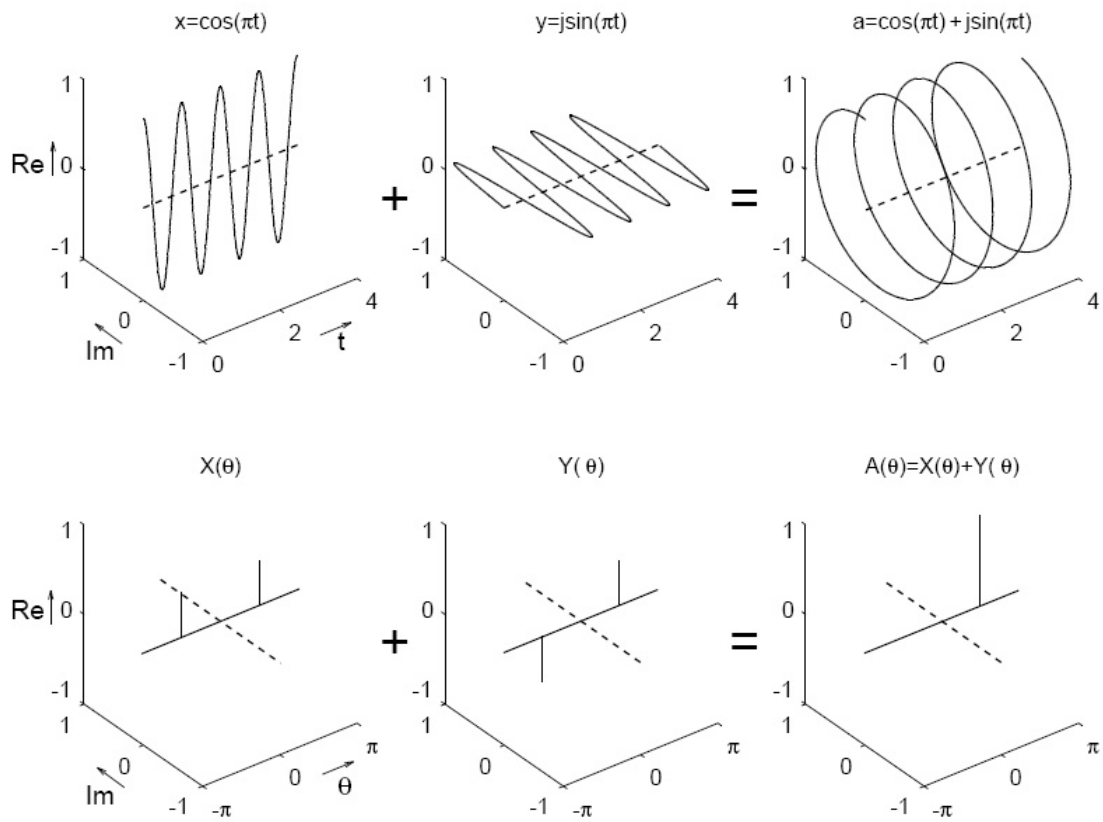
Vlastnosti analytického signálu jsou patrné i z obrázku 2.1. Na základě těchto vlastností lze říci, že analytický signál má oproti reálnému signálu poloviční šířku spektra. Analytický signál má i další důležitou vlastnost: z časové oblasti signálu lze vypočítat okamžitou amplitudu a kmitočet.

Okamžitá amplituda (obálka) původního signálu je dána absolutní hodnotou analytického signálu. Okamžitá amplituda se definuje vztahem 2.3:

$$a(t) = |x_a(t)| = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)}. \quad (2.3)$$

Okamžitý kmitočet původního signálu je odvozen pomocí derivace fáze analytického signálu [4]. Okamžitý kmitočet je definován vztahem 2.4:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \phi'(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t). \quad (2.4)$$



Obr. 2.1: Analytický signál a jeho vlastnosti, obrázek převzat z [3]

2.2 Hilbertova transformace

Již bylo zmíněno, že Hilbertova transformace (HT) umožňuje z reálného signálu vytvořit signál analytický. Tato transformace má velký význam v matematice a ve zpracování signálu, je pojmenována po německém matematikovi Davidu Hilbertovi (1862-1943). Hilbertova transformace je definována vztahem 2.5. Další možností, jak definovat Hilbertovu transformaci je pomocí konvoluce mezi transformovanou funkcí a převrácenou hodnotou její proměnné (rovnice 2.6) [2]:

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{t - \tau} d\tau, \quad (2.5)$$

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} f(t) * \frac{1}{t}. \quad (2.6)$$

Princip Hilbertovy transformace, při odvozování analytického signálu, si lze představit tak, že násobíme kmitočtové koeficienty (vzniklé Furierovou transformací původního signálu) číslem j pro záporné kmitočty a číslem $-j$ pro kladné kmitočty. Hilbertův obraz se vypočítá zpětnou Furierovou transformací takto upraveného spektra [3].

3 VÝPOČET OKAMŽITÉHO KMITOČTU

3.1 Výpočet založený na derivaci fáze analytického signálu

První možností výpočtu okamžitého kmitočtu je využití vlastností analytického signálu, z definičního vzorce okamžitého kmitočtu (vzorec 2.4), pomocí derivace fáze. Fáze se získá vypočtením Hilbertovy transformace. Postup je následující:

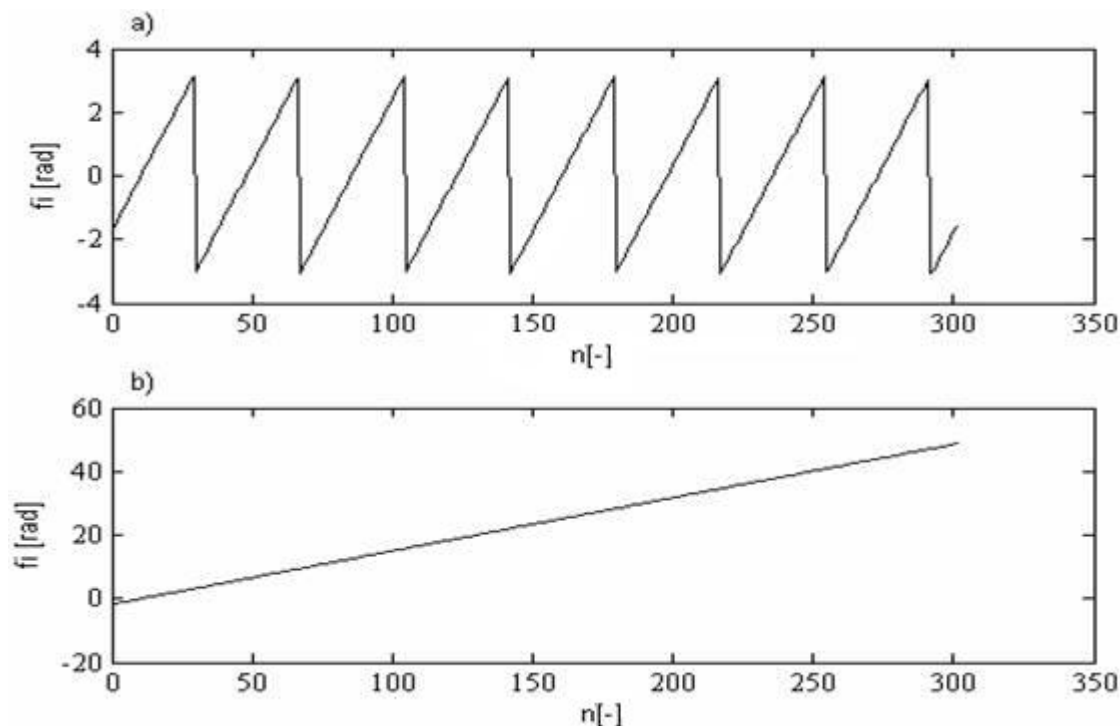
- a) Je vytvořena Hilbertova transformace (analytický signál) ke vstupním vzorkům testovacího signálu.
- b) Je vypočtena fáze jednotlivých transformovaných komplexních vzorků.
- c) Derivuje se okamžitá fáze podle času. Jsou využity vzorce (3.2),(3.3),(3.4) z kapitoly 3.1.1.

Při implementaci jednotlivých algoritmů do prostředí Matlab je využito již vytvořených funkcí, které program Matlab obsahuje.

K vytvoření Hilbertova transformačního páru slouží funkce *hilbert()*. Matlab funkci *hilbert()* počítá ze vzorce 2.6. Vypočítá nejprve obraz Furierovy transformace (FT) pomocí rychlé Furierovy transformace (FFT) vstupních vzorků, potom přepočítá koeficienty na záporných kmitočtech, aby byly nulové, a nakonec provede zpětnou rychlou Furierovu transformaci.

Na výpočet fáze je použita funkce *atan2()*, což je čtyřkvadrantová inverzní funkce tangens. Vypočtené hodnoty leží v uzavřeném intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Aby byly odstraněny skoky, které vzniknou na výstupu funkce *atan2()*, použije se funkce *unwrap()*. Tato funkce odstraní skoky a vznikne hladká křivka. Na obrázku 3.1 je uveden rozdíl mezi vstupem a výstupem signálu, jenž byl “rozbalen” pomocí funkce *unwrap()*. Vstupním signálem pro grafy na obrázku 3.1 byl kosinusový signál o kmitočtu 8 Hz s vzorkovacím kmitočtem 300 Hz. Na grafu 3.1a) je vynesena fáze Hilbertova obrazu vstupního signálu a na obrázku 3.1b) stejná fáze, ovšem po odstranění skoků pomocí funkce *unwrap()*.



Obr. 3.1: a) Fáze vypočtená z analytického signálu, b) Fáze po úpravě (rozbalení) pomocí funkce `unwrap(fí)`.

3.1.1 Numerická derivace

Při výpočtu okamžitého kmitočtu je potřeba derivovat vypočtenou fázi, která má konečný počet diskrétních hodnot. Zde je využito numerické derivace.

Numerická derivace patří mezi numerické metody a používá se zejména v případech, že analytická derivace je obtížně proveditelná. Odhad používá konečný počet hodnot derivované funkce. Matematická definice [5]:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.1)$$

Je-li zvoleno h různé od nuly, derivace je odhadnuta:

$$d(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.2)$$

Při výpočtech je tato derivace označována jako dvoubodová. Ze vzorce je patrné, že derivace se počítá jako směrnice sečny dvou bodů dané funkce. Ideální derivace by měla mít hodnotu tečny. K zpřesnění tohoto numerického výpočtu lze použít vícebodové derivace. Vzorce lze odvodit derivováním interpolačních polynomů, vyjádřených diferencemi [5].

Vzorec pro numerickou derivaci tří ekvidistantních bodů [5]:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (3.3)$$

Vzorec pro numerickou derivaci pěti bodů [11]:

$$f'(x) = \frac{1}{12h} [y(n+2) - y(n-2) + 4[y(n+1) - y(n-1)]]. \quad (3.4)$$

3.2 Nelineární metody výpočtu okamžitého kmitočtu

Nelineární metody výpočtu jsou odvozeny z výstupu lineárních predikčních algoritmů. Vstupem pro lineární predikční algoritmy jsou vzorky vstupních dat analyzovaného signálu. V této práci jsou využity metody DESA, Pronyho metoda a modifikovaná kovariance. Všechny výpočty nesou hodnotu okamžitého kmitočtu, pokud je vstupní signál ve formě $x_n = A \cdot \cos(\Omega n + \phi)$.

3.2.1 DESA - the discrete energy separation algorithm (diskrétní algoritmus separace energie)

Tento postup je založen na nelineárních diferenciálních operátorech, které mohou sledovat okamžitý vývoj energie. Mezi nejdůležitější patří Teager-Kaiserův energetický operátor (Teager-Kaiser energy operator) [6]. Existuje jak jeho spojitá, tak i diskrétní verze. V digitálním zpracování použijeme jeho diskrétní verzi:

$$\Psi[x_n] \equiv x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}. \quad (3.5)$$

$x_n = x(n)$ diskrétní vzorek AM-FM signálu.

Ψ Teagerův energetický operátor, to je:

$$\Psi_d[x_n] \approx A^2[n] \sin^2(\Omega[n]). \quad (3.6)$$

V [7] je odvozen postup, jak lze z hodnoty okamžité energie separovat hodnotu okamžitého kmitočtu a okamžitou amplitudu. Vzorce pro okamžitý kmitočet a amplitudu:

$$\arccos\left(1 - \frac{\Psi_d[x_n - x_{n-1}] + \Psi_d[x_{n+1} - x_n]}{4\Psi_d[x_n]}\right) \approx \Omega[n], \quad (3.7)$$

$$\sqrt{\frac{\Psi_d[x_n]}{\sin^2(\Omega[n])}} \approx |A[n]|. \quad (3.8)$$

Vzorce použité k výpočtu pomocí DESA algoritmů: DESA-1a, DESA-1 a DESA-2 představil Maragos a další v [7]. Tyto vzorce jsou uvedeny v Tabulce 1 a budou

implementovány do Matlabu.

3.2.2 Aplikace pronyho metody

Pronyho metoda je postup, jak extrahovat sinusový nebo exponenciální signál, řešením sady lineárních rovnic [8]. Metoda je pojmenována podle francouzského matematika Gaspard Clair François Marie Riche de Prony (1755 - 1839). V případě 4 vstupních vzorků je okamžitý kmitočet získán z kořenů predikčního polynomu [1]:

$$\arccos\left(\frac{\Gamma(x_n)}{\Psi(x_{n-1}) + \Psi(x_n)}\right) \approx \Omega_{P4(n)}. \quad (3.9)$$

$\Psi(x_n) \dots$ Teagerův energetický operátor rovnice (3.5),

$\Gamma(x_n) \equiv x_{n-1}x_n - x_{n-2}x_{n+1}$ (nový operátor).

Vzorec modifikovaného pronyho výpočtu byl odvozen kombinací posunuté verze (3.9):

$$\arccos\left(\frac{\Gamma(x_n) + \Gamma(x_{n+1})}{4\Psi(x_n)}\right) \approx \Omega_{P5(n)}. \quad (3.10)$$

Vzorce použité k výpočtu touto metodou jsou uvedeny v Tabulce 1.

3.2.3 Metoda modifikované kovariance

Modifikovaná kovariance slouží k hledání minima průměru dopředné a zpětné predikční chyby [9]. Postupem odvozeným v [1] lze získat okamžitý kmitočet z kořenů predikčních polynomů pro případ 4 vzorků:

$$\arccos\left(\frac{x_{n-2}x_{n-1} + 2x_{n-1}x_n + x_nx_{n+1}}{2(x_{n-1}^2 + x_n^2)}\right) \approx \Omega_{LP4(n)}. \quad (3.11)$$

Pro případ 5 vzorků:

$$\arccos\left(\frac{x_{n-2}x_{n-1} + 2x_{n-1}x_n + 2x_nx_{n+1} + x_{n+1}x_{n+2}}{2(x_{n-1}^2 + x_n^2 + x_{n+1}^2)}\right) \approx \Omega_{LP4(n)}. \quad (3.12)$$

Konkrétní vzorce, které jsou použity k výpočtu, jsou uvedeny v Tabulce 1. Tabulka byla převzata z [1]. Mimo vzorce uvedené v Tabulce 1, bude ještě použit algoritmus, uvedený v kapitole 3.1.

Tabulka 1: Vzorce pro výpočet okamžitého kmítočtu, tabulka převzata z [1]

Algoritmus	Vzorec	
DESA-1a (4b)	$\Omega(i) = \arccos\left(\frac{(x_2^2 - x_1x_3) - (x_1^2 - x_0x_2) + (x_1x_2 - x_0x_3)}{2(x_2^2 - x_1x_3)}\right)$	(1)
Mod. Kovariance (4b)	$\Omega(i) = \arccos\left(\frac{x_0x_1 + 2x_1x_2 + x_2x_3}{2(x_1^2 + x_2^2)}\right)$	(2)
Prony (4b)	$\Omega(i) = \arccos\left(\frac{x_1x_2 - x_0x_3}{(x_1^2 - x_0x_2) + (x_2^2 - x_1x_3)}\right)$	(3)
DESA-1 (5b)	$\Omega(i) = \arccos\left(\frac{2(x_2^2 - x_1x_3) - (x_1^2 - x_0x_2) - (x_3^2 - x_2x_4) + x_1x_2 - x_0x_3 + x_2x_3 - x_1x_4}{4(x_2^2 - x_1x_3)}\right)$	(4)
DESA-2 (5b)	$\Omega(i) = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{(x_2^2 - x_0x_4) - (x_1^2 - x_0x_2) - (x_3^2 - x_2x_4)}{2(x_2^2 - x_1x_3)}\right)$	(5)
Mod. kovariance (5b)	$\Omega(i) = \arccos\left(\frac{x_0x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3x_4}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right)$	(6)
Mod. pronyho m. (5b)	$\Omega(i) = \arccos\left(\frac{(x_1x_2 - x_0x_3) + (x_2x_3 - x_1x_4)}{4(x_2^2 - x_1x_3)}\right)$	(7)

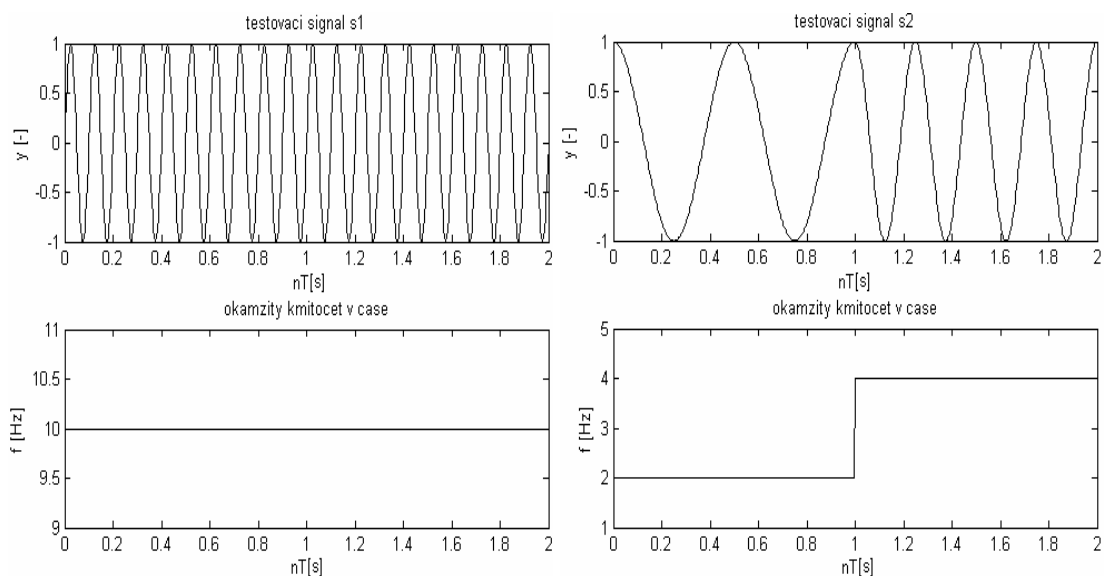
4 VLASTNOSTI JEDNOTLIVÝCH METOD, IMPLEMENTACE DO MATLABU

4.1 Časové rozlišení metod

Nejprve je analýza v Matlabu zaměřena na to, jakých odchylek se jednotlivé metody dopouštějí, je-li počítán okamžitý kmitočet signálů s časově proměnným kmitočtem. Jsou vytvořeny testovací signály $s_1(n)$ až $s_4(n)$, uvedené na obrázcích 4.1 až 4.4, na kterých lze pozorovat vlastnosti jednotlivých metod výpočtů okamžitého kmitočtu. Všechny signály jsou funkce kosinus o amplitudě 1. Kmitočet každého testovacího signálu má jiný vývoj v čase:

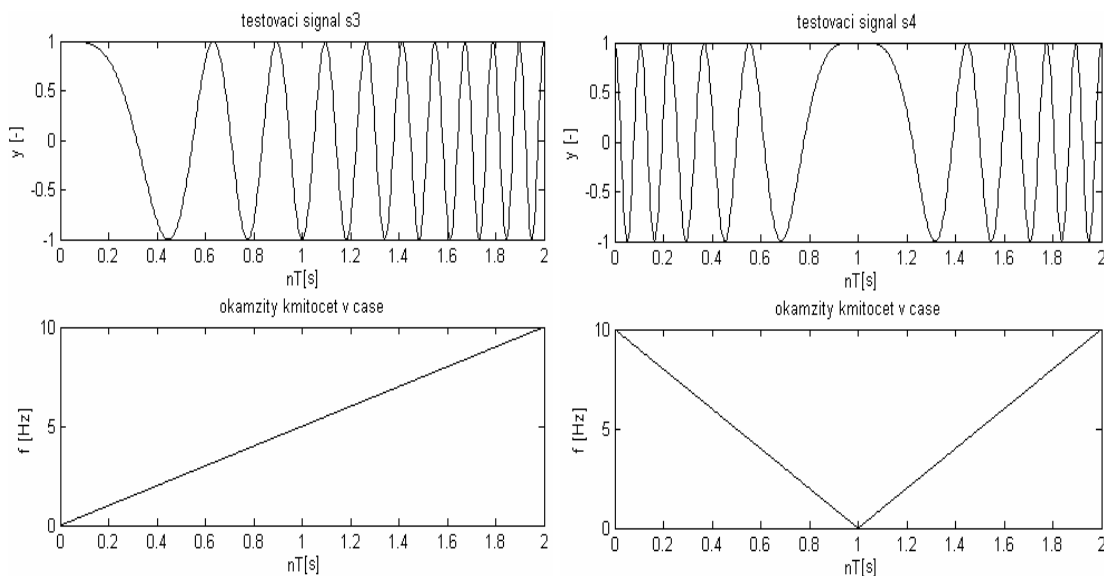
- $s_1(n)$ má konstantní kmitočet $f = 10$ Hz,
- $s_2(n)$ mění kmitočet skokem z 2 Hz na 4 Hz,
- $s_3(n)$: kmitočet signálu rovnoměrně roste z nuly na 10 Hz,
- $s_4(n)$: kmitočet signálu rovnoměrně klesá z 10 Hz na nulu, po dosažení minima plynule roste na konečných 10 Hz.

Všechny testovací signály $s_1(n)$ až $s_4(n)$ jsou vytvořeny s vzorkovacím kmitočtem $f_{vz} = 300$ Hz ($T = 0,003$), a časovou osu mají v rozsahu 0 až 2 vteřiny (celý signál má $n = 600$ vzorků). Signál na obrázku 4.2 (skoková změna kmitočtu) byl vytvořen pomocí funkce `vco()`, signály z obrázků 4.3 a 4.4 (plynulá změna kmitočtu) funkcí `chirp()`. V obrázcích je na ose x vynesena násobek $n \cdot T$ (později také čas t) s jednotkou v sekundách. Na ose y je vynesena bezrozměrná amplituda.



Obr. 4.1 (vlevo): Testovací signál $s_1(n)$ a jeho okamžitý kmitočet.

Obr. 4.2 (vpravo): Testovací signál $s_2(n)$ a jeho okamžitý kmitočet.



Obr. 4.3 (vlevo): Testovací signál $s_3(n)$ a jeho okamžitý kmitočet.

Obr. 4.4 (vpravo): Testovací signál $s_4(n)$ a jeho okamžitý kmitočet.

Nyní jsou na tyto signály aplikovány vzorce z Tabulky 1 a algoritmus uvedený v kapitole 3.1. V ideálním případě by výsledky měly vypadat podobně, jako dolní grafy na obrázcích 4.1 až 4.4. Pro srovnání, jak jednotlivé metody, pro výpočet okamžitého kmitočtu fungují, je definována odchylka kmitočtu vypočítaného f_{vyp} od kmitočtu teoretického (správného) f_s :

$$\Delta f(i) = f_{\text{vyp}}(i) - f_s(i) = \frac{\Omega(i)}{2\pi} - f_s(i). \quad (4.1)$$

$f_{\text{vyp}}(i) = \frac{\Omega(i)}{2\pi}$ kmitočet vypočítaný ze vzorků vstupních testovacích signálů.

$f_s(i)$ kmitočet správný (viz spodní grafy na obrázcích 4.1 až 4.4).

Na grafech obrázků 4.5 až 4.8 jsou závislosti chyby výpočtů okamžitého kmitočtu (4.1) na čase. Jedná se o diskrétní čas v rozmezí 0 až 2 vteřin (stejně jako u vstupních testovacích signálů).

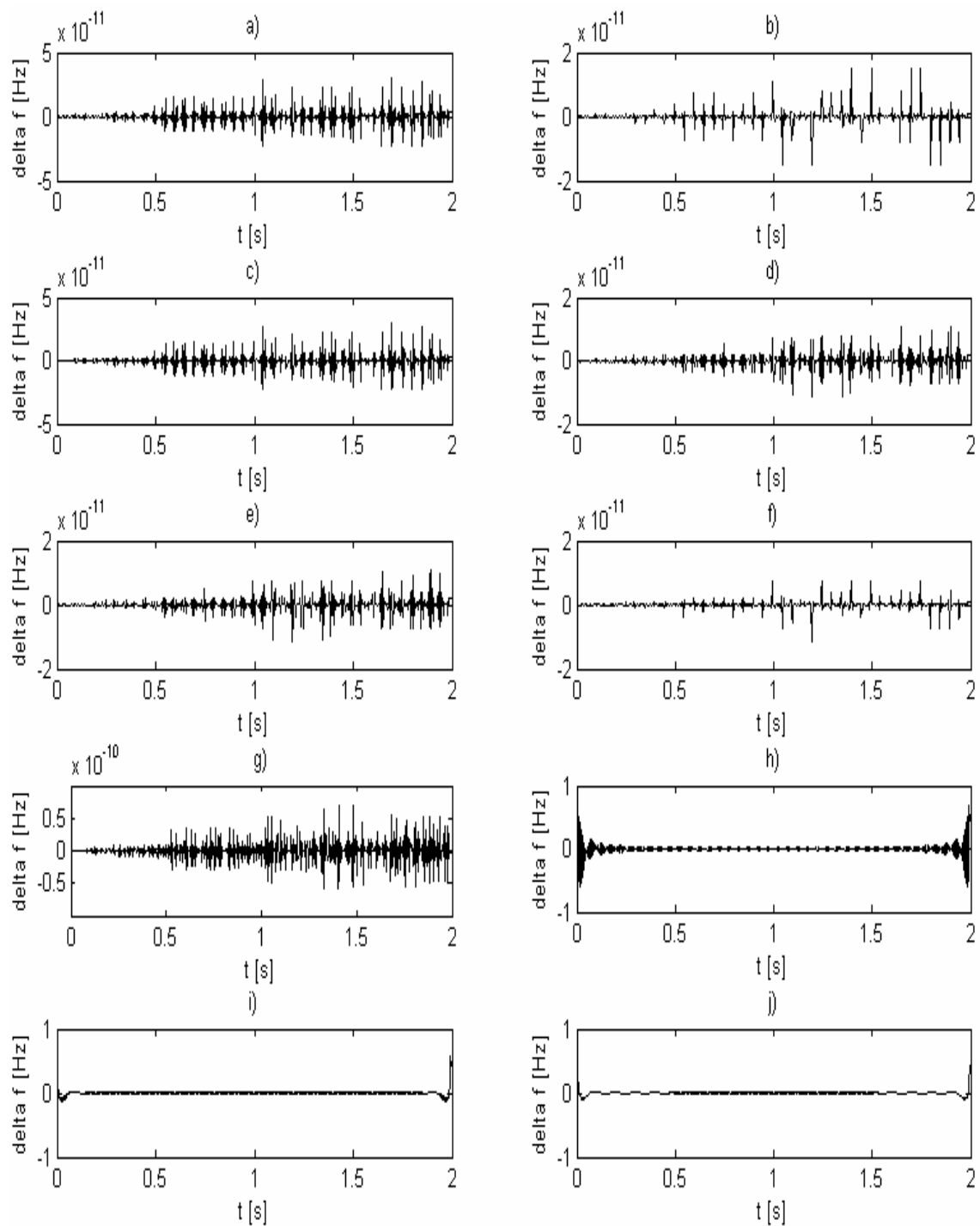
Pokud má vstupní signál konstantní kmitočet $s_1(n)$ (obrázek 4.5), odchylky metod (a-g) se pohybují řádově 10^{-11} Hz. A všechny tyto metody počítají tento testovací signál s podobnou přesností. Odchylky u metod derivací fáze jsou v rozmezí 0 až 0,5 Hz, přičemž největší odchylky jsou pozorovány na začátku a na konci pozorovaného intervalu.

Na skokovou změnu kmitočtu $s_2(n)$ (obrázek 4.6) výpočty nezareagují ihned, vzniká odchylka, jejíž maximum je rovno rozdílu kmitočtů před a po skoku. Trvání těchto odchylek je dáno dobou čtyř vzorků pro čtyřbodové metody a pěti vzorků pro metody pětibodové. Výjimkou je modifikovaná pronyho metoda (g), ta má odchylku výrazně vyšší, a to přibližně 36 Hz. Výpočty založené na derivaci fáze zde fungují

velmi dobře, jejich maximální odchylka je menší než 1Hz. Na druhou stranu metody založené na derivaci fáze potřebují více času, než se ustálí na správné (teoretické) hodnotě okamžitého kmitočtu.

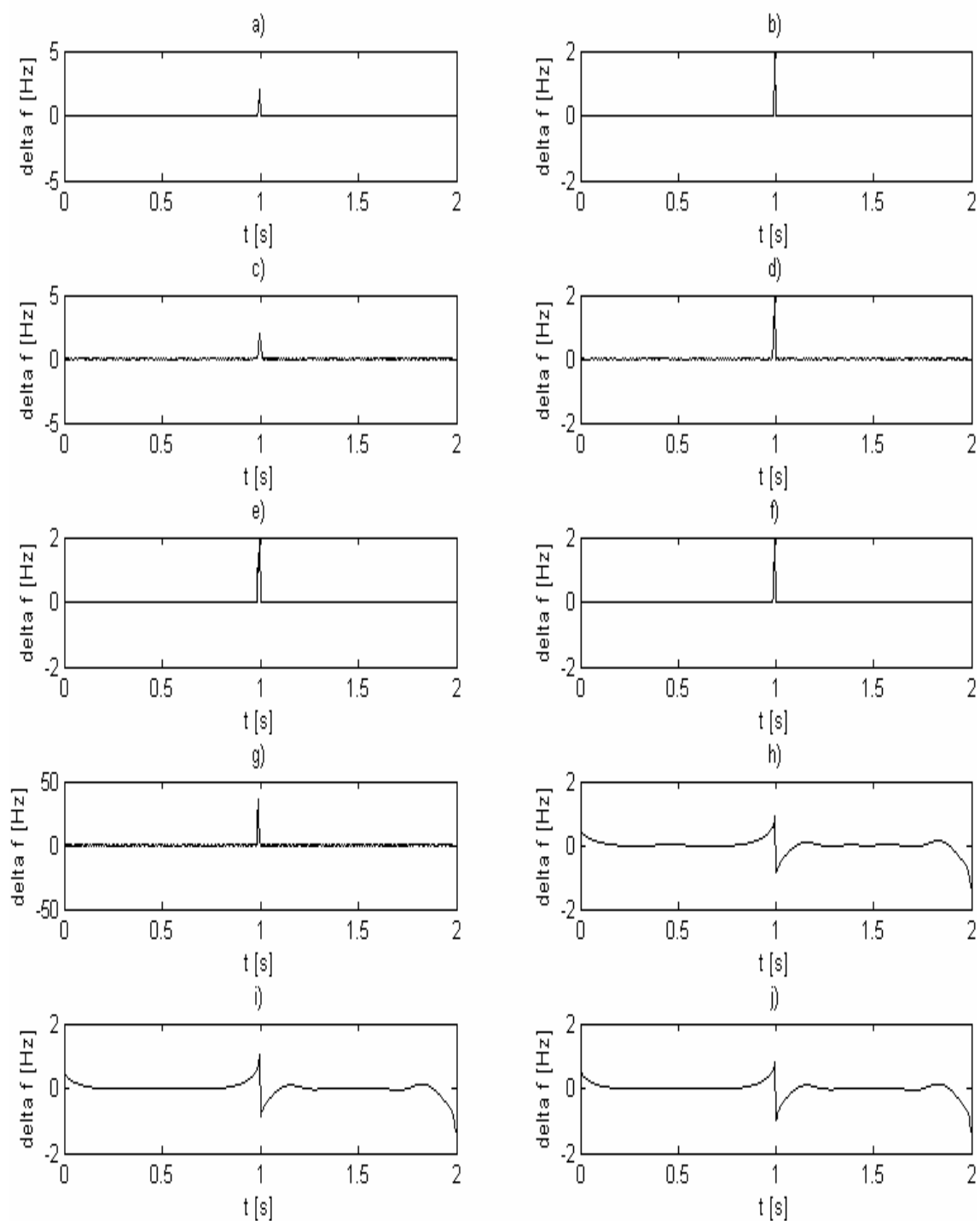
Odchylky vypočítané ze signálu $s_3(n)$ (obrázek 4.7) mají maximální velikost okolo 0,3 Hz pro metody: a), c), d) a e). Maximální odchylka pro metody modifikované kovariance (b a f) jsou přibližně desetkrát vyšší (3 Hz). Modifikovaná pronyho metoda (g) nabývá na počátku časové osy odchylky 24 Hz. Odchylky se u výpočtu pomocí derivace fáze s rostoucím časem výrazně zvyšují až do hodnot kolem 6 Hz.

Výsledky po průchodu signálu $s_4(n)$ lze pozorovat na obrázku 4.8, modifikovaná pronyho metoda (g) zde opět reaguje na výraznou změnu okamžitého kmitočtu nejhůře. Není tedy vhodná k analýze signálů které neplynule či skokově mění svůj kmitočet. Podobně jako u testovacího signálu $s_3(n)$, nejmenší odchylky (do 0,5 Hz) mají všechny metody DESA a čtyřbodová pronyho metoda. Malé odchylky mají rovněž všechny metody, využívající derivace fáze.



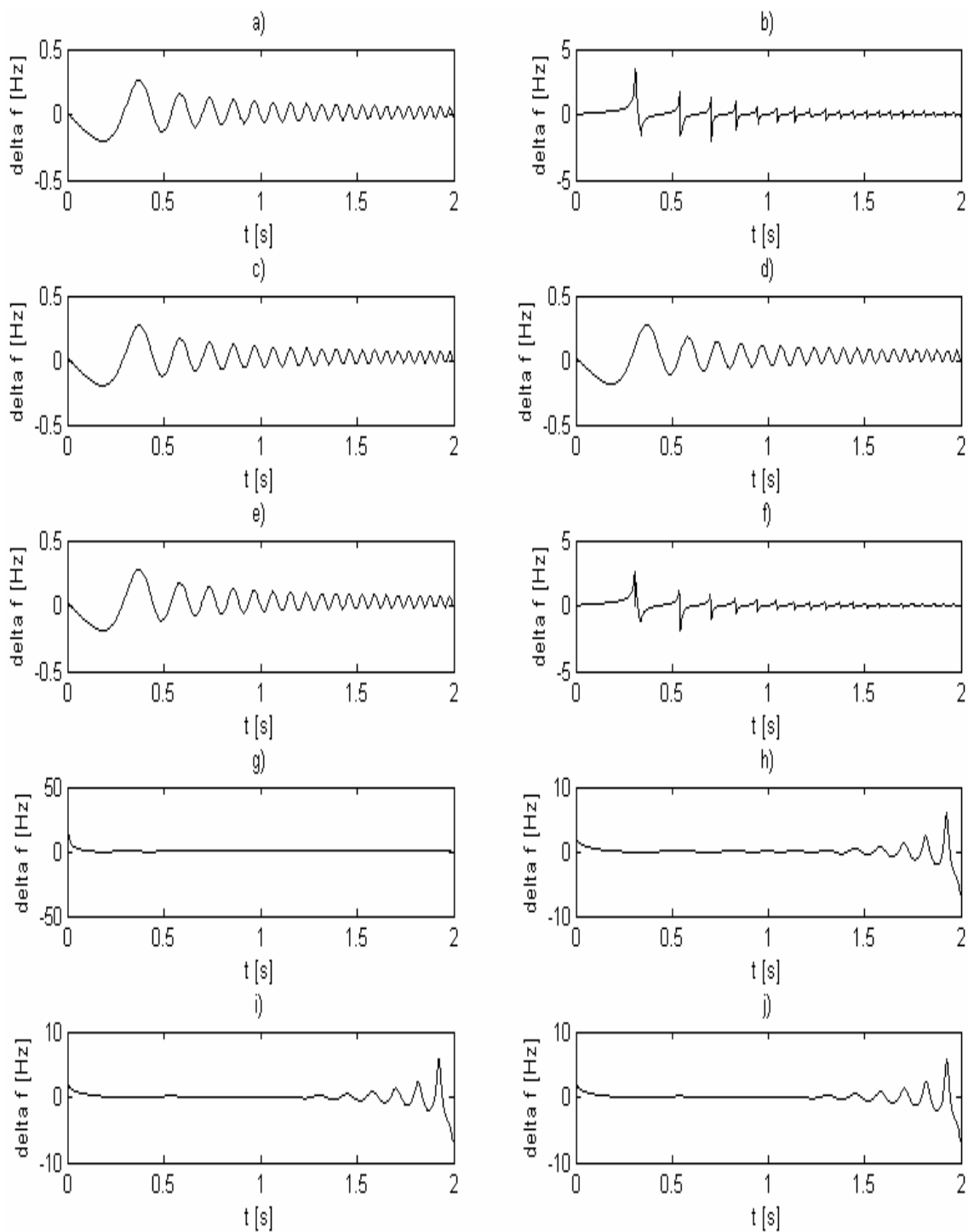
Obr. 4.5: Grafy odchylek pro testovací signál $s_1(n)$

- | | |
|---|---|
| a) Δf pro DESA-1a (4body) | f) Δf pro Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Δf pro Mod. kovarianci (4body) | g) Δf pro Mod. prony (5bodů) |
| c) Δf pro Prony (4body) | h) Δf pro Dvoubodovou derivaci |
| d) Δf pro DESA-1 (5bodů) | i) Δf pro Tříbodovou derivaci |
| e) Δf pro DESA-2 (5bodů) | j) Δf pro Pětibodovou derivaci |



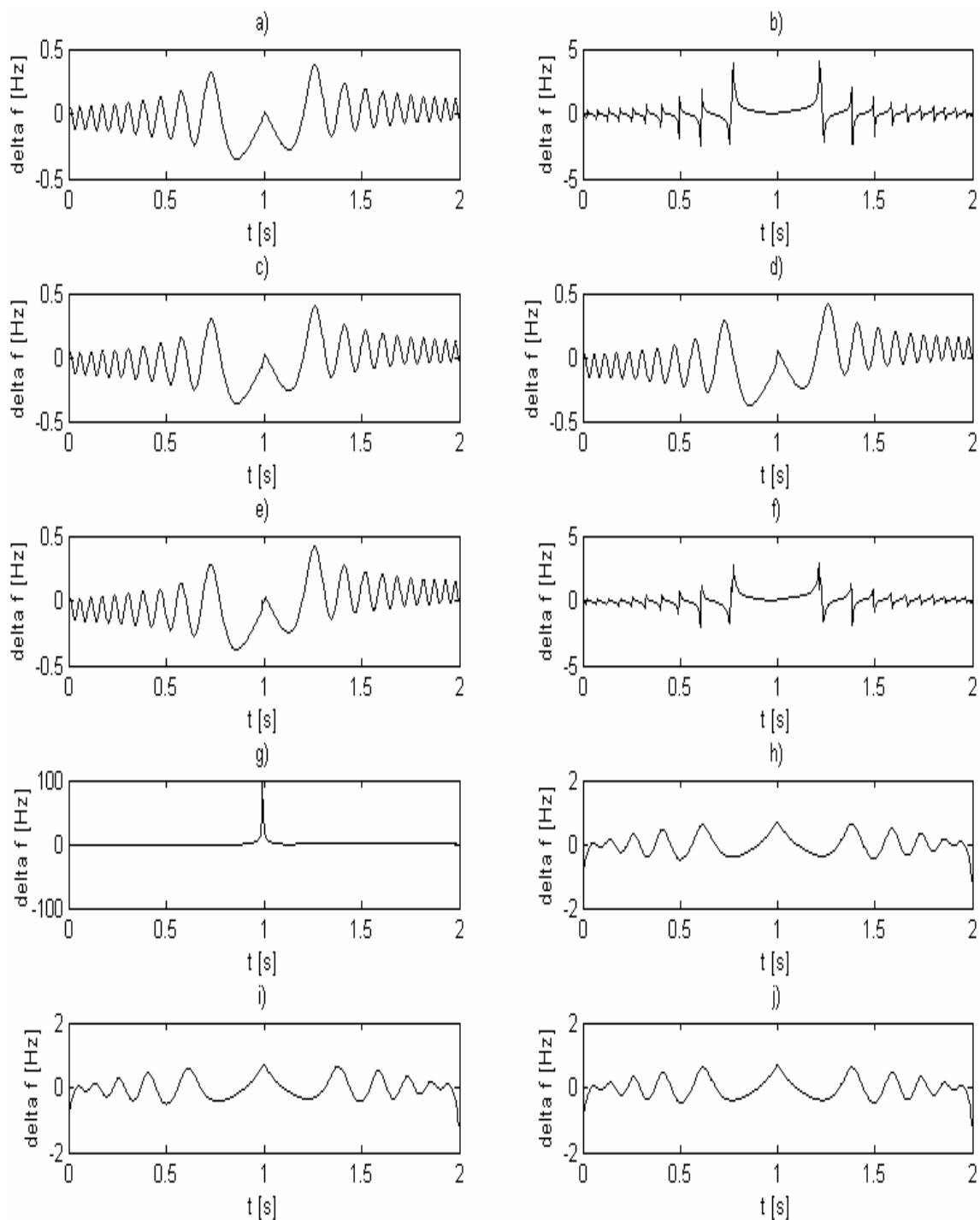
Obr. 4.6: Grafy odchylek pro testovací signál $s_2(n)$

- | | |
|---|---|
| a) Δf pro DESA-1a (4body) | f) Δf pro Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Δf pro Mod. kovarianci (4body) | g) Δf pro Mod. prony (5bodů) |
| c) Δf pro Prony (4body) | h) Δf pro Dvoubodovou derivaci |
| d) Δf pro DESA-1 (5bodů) | i) Δf pro Tříbodovou derivaci |
| e) Δf pro DESA-2 (5bodů) | j) Δf pro Pětibodovou derivaci |



Obr. 4.7: Grafy odchylek pro testovací signál $s_3(n)$

- | | |
|---|---|
| a) Δf pro DESA-1a (4body) | f) Δf pro Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Δf pro Mod. kovarianci (4body) | g) Δf pro Mod. prony (5bodů) |
| c) Δf pro Prony (4body) | h) Δf pro Dvoubodovou derivaci |
| d) Δf pro DESA-1 (5bodů) | i) Δf pro Tříbodovou derivaci |
| e) Δf pro DESA-2 (5bodů) | j) Δf pro Pětibodovou derivaci |



Obr. 4.8: Grafy odchylek pro testovací signál $s_4(n)$

- | | |
|---|---|
| a) Δf pro DESA-1a (4body) | f) Δf pro Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Δf pro Mod. kovarianci (4body) | g) Δf pro Mod. prony (5bodů) |
| c) Δf pro Prony (4body) | h) Δf pro Dvoubodovou derivaci |
| d) Δf pro DESA-1 (5bodů) | i) Δf pro Třibodovou derivaci |
| e) Δf pro DESA-2 (5bodů) | j) Δf pro Pětibodovou derivaci |

4.2 Chyby metod pro kmitočty v rozsahu od nuly do poloviny f_{vz}

Tato kapitola se zabývá tím, jak přesně jednotlivé metody fungují, pokud je na vstup přiveden kosinusový signál s konstantním kmitočtem. Tento kmitočet se bude měnit pro různá měření a bude sledováno, jak se bude měnit přesnost jednotlivých metod. Všechny metody pracují s diskrétními signály. Jednou ze základních vlastností diskrétních signálů je vzorkovací kmitočet. Aby bylo možné vypočítat kmitočet, je zřejmé, že daný kmitočet musí být minimálně dvojnásobně menší, než kmitočet vzorkovací $f \leq f_{vz}/2$. Je nutno mít nejméně 2 vzorky na jednu periodu. V opačném případě nelze kmitočet rozlišit. Na vstup je přiveden signál v rozsahu od jedné, do poloviny vzorkovacího kmitočtu $f \in \left\langle 1; \frac{f_{vz}}{2} - 1 \right\rangle$.

Pro metody z Tabulky 1 nelze přivést signál o kmitočtu $f = 0\text{Hz}$. Důvod je ten, že algoritmy obsahují zlomek, kde do čitatele i jmenovatele je dosazován vstupní vzorek. Pokud je na vstupu vzorek o hodnotě $x(n) = 0$, pak je výsledkem výraz $0/0$, který nemá řešení. Možností by bylo na vstup vložit signál se stejnosměrnou složkou nenulové hodnoty. To lze provést u kovariančních metod, u ostatních metod dojde ve jmenovateli k odečtení stejných čísel a opět se ve jmenovateli objeví nula. Nicméně ani u kovariance počítat s $f = 0$ nelze, protože metody fungují jen pro vstupní signál ve tvaru $x_n = A \cdot \cos(\Omega n + \Phi)$. Kmitočet signálů se stejnosměrnou složkou algoritmy počítat neumí.

Pro srovnání, které metody počítají lépe nebo hůře, je zavedena veličina střední kvadratická odchylka σ . Ta je definována vzorcem (4.1) [10]:

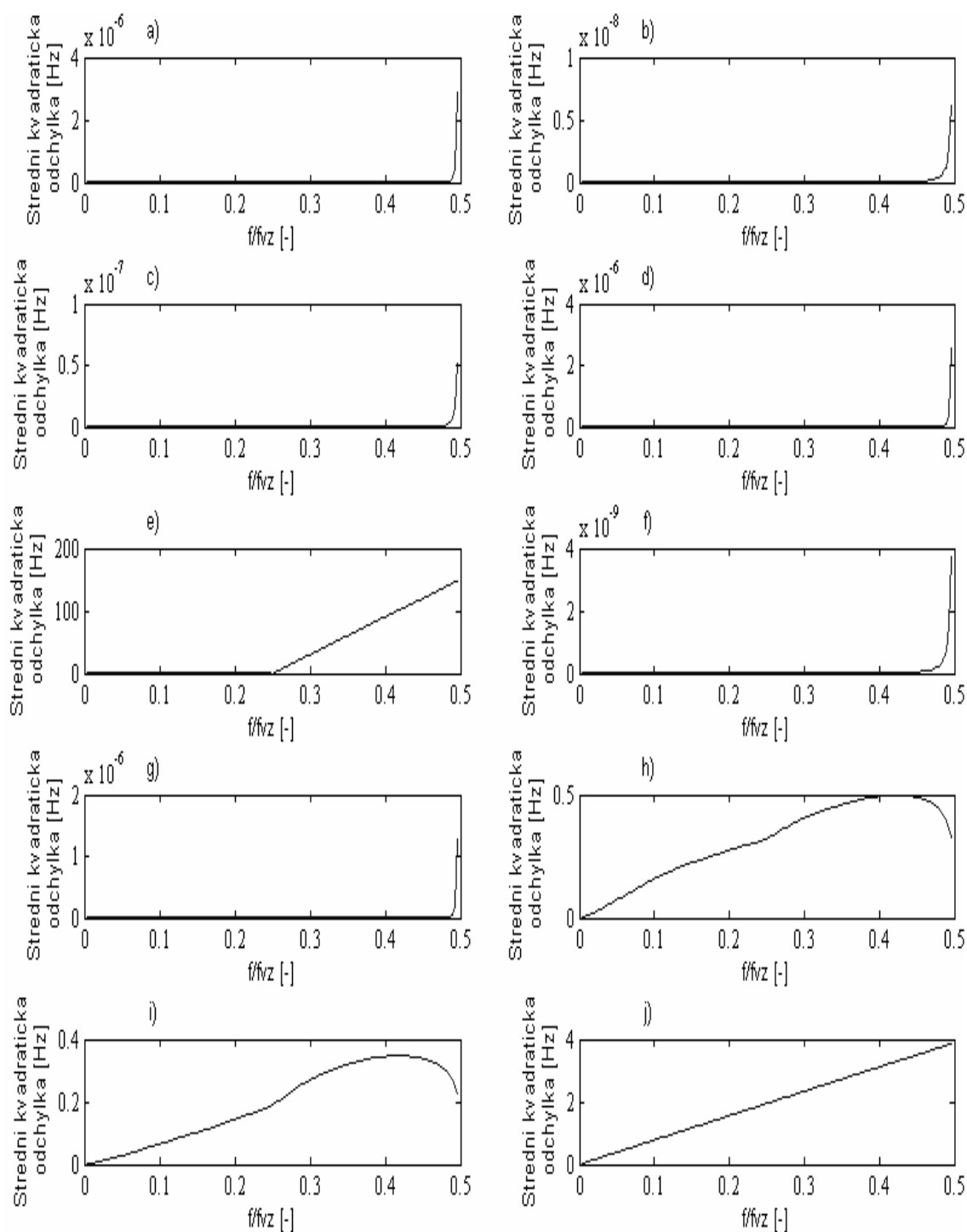
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))^2} . \quad (4.1)$$

x_i vypočtená hodnota kmitočtu,

$E(x)$ hodnota skutečného kmitočtu.

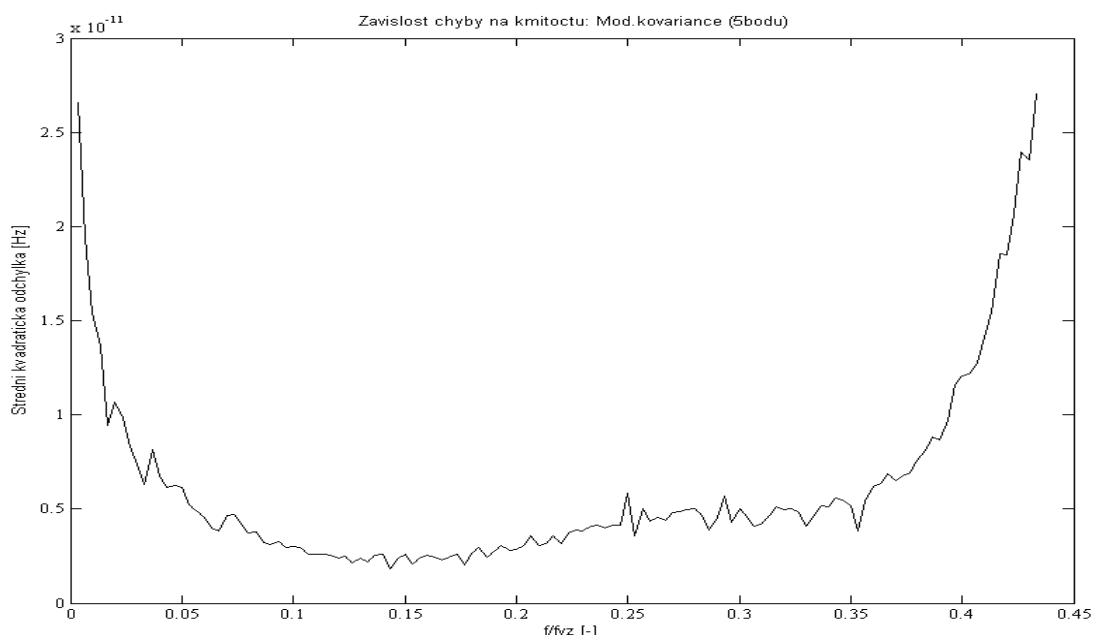
Vypočtené odchylky jsou vyneseny v grafech na obrázku 4.9. Grafy jsou závislostmi střední kvadratické odchylky na kmitočtu. Vstupním signálem pro počítání kmitočtů a následných odchylek byl použit kosinusový signál s vzorkovacím kmitočtem 300 Hz, v diskrétním čase od 0 do 10 vteřin (celkem 3000 vzorků) a amplitudou jedna.

Výpočty dle vzorců z Tabulky 1 měly podobný průběh. Nejvyšší odchylky jsou patrné na kmitočtech které se blíží k $f_{vz}/2$. Na obrázku 4.10 je vynesena závislost odchylek pětibodové kovarianční metody v menším rozsahu kmitočtů, pro názornější průběh odchylek i na nižších kmitočtech. Podobně se chovaly i ostatní metody, odchylka s rostoucím kmitočtem klesá, na středních kmitočtech nabývá minima a potom následně roste až k svému maximu při kmitočtu $f = f_{vz}/2 - 1$.



Obr. 4.9: Závislost středních kvadratických odchylek na kmitočtu pro metody:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) DESA-1a (4body) | f) Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Mod. kovariance (4body) | g) Mod. prony (5bodů) |
| c) Prony (4body) | h) Dvoubodovou derivaci |
| d) DESA-1 (5bodů) | i) Tříbodovou derivaci |
| e) DESA-2 (5bodů) | j) Pětibodovou derivaci |



Obr. 4.10: Závislost odchylky na kmitočtu mod. kovarianční Metoda (5bodů)

Maximální odchylky pro všechny metody jsou uvedené v Tabulce 2. Metoda DESA-2 (5bodů), podle obrázku 4.9.e), funguje jen do kmitočtu $f_{vz}/4$, není tedy vhodná pro výpočet signálů s vysokými kmitočty. Metody založené na derivaci fáze (obr. 4.9 h), i), j)) měly chybu celkově vyšší, v řádu desetin až jednotek herců. Chyba se s rostoucím kmitočtem zvyšuje, u dvoubodové a třibodové derivace má však maximální hodnotu v okolí hodnoty $f = 0,4f_{vz}$. Tvar charakteristiky závislosti chyby na kmitočtu, u metody derivace fáze, závisí na tom, zda do vzorce 4.1 dosazujeme vzorky na začátku a na konci sledovaného intervalu. Nezapočítají-li se okrajové vzorky, je dosaženo vyšší přesnosti. Hodnoty, které jsou dosazovány do vzorce 4.1 lze pozorovat na obr. 4.5 h), i), j) - metoda potřebuje čas k ustálení.

Tabulka 2: Maximální hodnoty střední kvadratické chyby

Algoritmus	σ_{\max} [Hz]
DESA-1a (4body)	$2,9 \times 10^{-6}$
Modifikovaná kovariance (4body)	$6,2 \times 10^{-9}$
Prony (4body)	$5,2 \times 10^{-8}$
DESA-1 (5bodů)	$2,6 \times 10^{-6}$
DESA-2 (5bodů)	2×10^{-10} *
Modifikovaná kovariance (5bodů)	4×10^{-9}
Modifikovaná pronyho m. (5bodů)	$1,3 \times 10^{-6}$
Dvoubodová derivace	0,50
Třibodová derivace	0,35
Pětibodová derivace	3,85

* DESA-2 (5bodů) hodnota pro $f_{vz}/4 - 1$. Viz obrázek 4.9 e)

5 VÝPOČET OKAMŽITÉHO KMITOČTU SIGNÁLŮ S PŘIDANÝM ŠUMEM.

5.1 Náhodná veličina, normální rozdělení

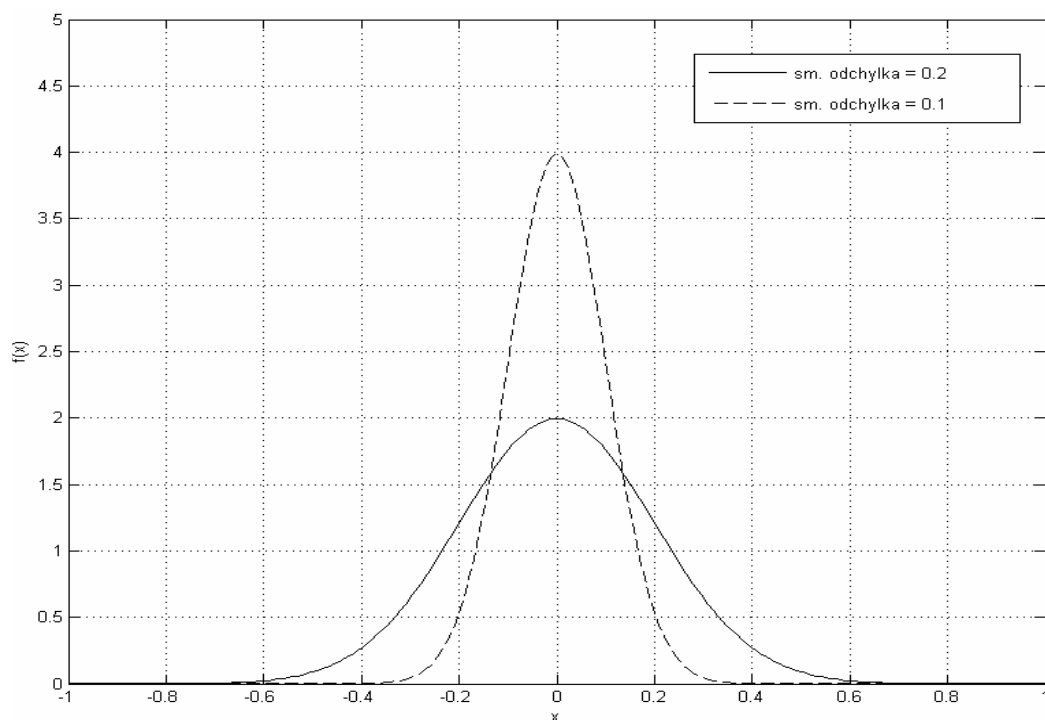
Šum je náhodný signál, jehož následující hodnoty jsou vzájemně nezávislé s hodnotami předcházejícími. Šum je charakterizován náhodnou veličinou. Náhodná veličina je proměnná, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu [13]. Rozlišuje se náhodná veličina spojitá a diskrétní. U diskrétní náhodné veličiny tvoří obor hodnot konkrétní hodnoty. U spojitě náhodné veličiny je obor hodnot tvořen konečným nebo nekonečným intervalem. Přiřadí-li se ke každé hodnotě pravděpodobnost, se kterou může hodnota nastat, je výsledkem rozdělení pravděpodobnosti. Existuje mnoho druhů rozdělení pravděpodobnosti, například binomické rozdělení, Poissonovo rozdělení, rovnoměrné rozdělení a normální rozdělení. V tomto případě je využito normální rozdělení (gaussovo), které charakterizuje gaussův šum. Rozdělení je charakterizováno dvěma parametry, a to střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ (nebo rozptylem σ^2). Rozdělení má hustotu pravděpodobnosti definovanou [14]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.1)$$

U normovaného rozdělení ($\mu = 0$ a $\sigma = 1$) má hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (5.2)$$

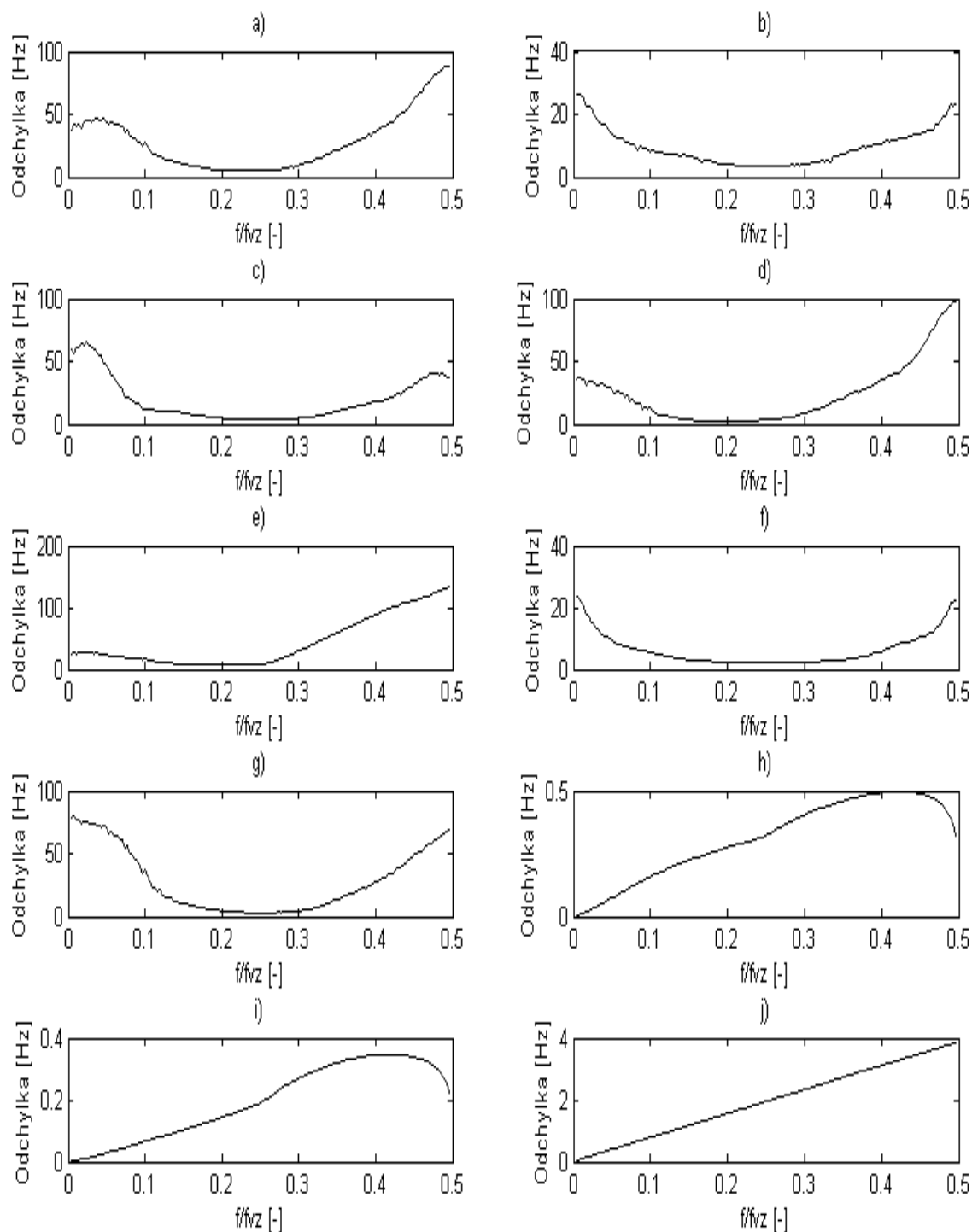
Střední hodnota μ vyjadřuje hodnotu, která se v rozdělení vyskytuje nejčastěji (na obrázku 5.1 leží pod vrcholem) a směrodatná odchylka σ určuje tvar hustoty normálního rozdělení. Čím má směrodatná odchylka vyšší hodnotu, tím je hustota rozdělení více plochá. Na obrázku 5.1 je graf hustoty normálního rozdělení pro $\sigma = 0.1$ a $\sigma = 0.2$.



Obr. 5.1: Hustota normálního rozdělení pravděpodobnosti

5.2 Implementace zašuměných signálů do Matlabu

Tato kapitola se zabývá přesností jednotlivých metod, pokud je na vstup přiveden zašuměný signál. Při simulacích v Matlabu je využita funkce *randn*, ta generuje náhodné čísla v normálním rozdělení. U této funkce lze libovolně nastavit parametry μ (střední hodnotu) a σ (směrodatná odchylka). U testování je vždy nastavena střední hodnota na $\mu = 0$, směrodatnou odchylka se u různých výpočtů mění. Funkce *randn* náhodně generuje čísla dle nastavených parametrů, které jsou posléze přičteny ke vstupnímu signálu.



Obr. 5.2: Závislost středních kvadratických odchylek na kmitočtu pro metody:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) DESA-1a (4body) | f) Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Mod. kovariance (4body) | g) Mod. prony (5bodů) |
| c) Prony (4body) | h) Dvoubodovou derivaci |
| d) DESA-1 (5bodů) | i) Tříbodovou derivaci |
| e) DESA-2 (5bodů) | j) Pětibodovou derivaci |

5.2.1 Chyby metod pro zašuměný signál s kmitočty v rozsahu od nuly do poloviny f_{vz} .

Stejným postupem jako v kapitole 4.2 byla zjištěna závislost střední kvadratické odchylky (vzorec 4.1) na kmitočtu, pro všechny uvažované metody výpočtu okamžitého kmitočtu (vzorce z Tabulky 1 a metoda derivující fázi). Grafický výsledek výpočtu je na obrázku 5.2. Na první pohled je vidět, že u zašuměných signálů budou mít lepší vlastnosti algoritmy derivující fázi analytického signálu. U ostatních metod lze pozorovat výraznou závislost odchylky na kmitočtu. U nízkých a vysokých kmitočtů se metody dopouštějí výrazných chyb, u většiny metod kolem $\Delta f(i) \approx 50$ Hz. U vypočtené závislosti byl na vstup přiveden sinusový signál s vzorkovacím kmitočtem 300 Hz. K vstupnímu signálu byl přičten šum se směrodatnou odchylkou $\sigma = 0,1$. Nejnižší odchylky jsou pozorovány u metod modifikované kovariance (čtyřbodové i pětibodové). Aby nedocházelo k výrazným chybám, je-li počítán okamžitý kmitočet zašuměného signálu pomocí predikčních metod, měl by se poměr kmitočtu měřeného signálu ke kmitočtu vzorkovacímu pohybovat v rozmezí 0,1 až 0,4 (lépe pak 0,2 až 0,3). Je-li použita pětibodová metoda DESA 2, pak by měl být tento poměr od nuly do 0,25, podobně jako u nezašuměných signálů. Metody které derivují fázi analytického signálu jsou proti šumu velmi odolné a lze je použít pro počítání okamžitého kmitočtu signálů s kmitočty od nuly, až do poloviny vzorkovacího kmitočtu.

5.2.2 Chyby metod pro zašuměný signál s konstantním kmitočtem a různou směrodatnou odchylkou šumu.

V této kapitole jsou prezentovány výsledky výpočtů středních kvadratických odchylek zašuměných signálů (vzorec 4.1). Výpočet byl proveden pro sinusový signál o konstantním kmitočtu $f = 75$ Hz, při vzorkovacím kmitočtu 300 Hz. Byl tedy použit kmitočet $f = 0,25 \cdot f_{vz}$, na které se metody dopouštěly nejmenších odchylek (vyplývá z kapitoly 5.2.1). Pro tento konstantní kmitočet je počítán okamžitý kmitočet vstupních signálů, přičemž se mění hodnota směrodatné odchylky přidaného šumu od 0 do 3,16. V Tabulce 3, 4 a 5 jsou rovněž uvedeny vypočtené průměrné kmitočty \bar{f} pro danou metodu a danou směrodatnou odchylku šumu. Konkrétní hodnoty, které jsou uvedené v tabulkách, jsou vypočteny z jedné realizace zašuměného signálu. Při výpočtu jiné realizace stejného signálu, se šumem o stejných parametrech, nejsou výsledky totožné. Výsledky jsou ale srovnatelné. Průměrné hodnoty vypočteného kmitočtu i odchylky jsou stejné pro tříbodovou a pětibodovou derivaci fáze – výsledky jsou uvedeny ve společné části tabulky.

Podle tabulky můžeme zhodnotit přesnost metod, ovšem toto zhodnocení platí jen pro zašuměné signály s kmitočtem $f_{vz}/4$. Při jiných kmitočtech je nutno vycházet z obrázku 5.2. Nejpřesnější metodou je pětibodová modifikovaná kovariance, následovaná stejnou metodou čtyřbodovou. Přesnost ostatních metod je podobná, pětibodové metody počítají o něco přesněji než čtyřbodové metody stejného algoritmu. Přesnost metod derivace fáze je v okolí středních kmitočtů srovnatelná s predikčními metodami, jejich předností je velmi dobrá přesnost na celém kmitočtovém rozsahu.

Tabulka 3: Závislost odchylek výpočtu na velikosti šumu: DESA1 4b, Mod. Kovariance 4b, Prony 4b

f = 75 Hz	DESA1 4b		Mod. Kovariance 4b		Prony 4b	
Směrodatná odchylka σ přidaného šumu [Hz]	Vypočtený průměrný kmitočet \bar{f} [Hz]	střední kvadratická odchylka vypočtené f [Hz]	Vypočtený průměrný kmitočet \bar{f} [Hz]	střední kvadratická odchylka vypočtené f [Hz]	Vypočtený průměrný kmitočet \bar{f} [Hz]	střední kvadratická odchylka vypočtené f [Hz]
0	75	1,372e-12	75	1,372e-12	75	1,372e-12
0,01	75,004	0,454	75,002	0,325	75,002	0,325
$\sqrt{0,001}$	75,025	1,656	74,994	1,115	74,994	1,116
0,1	75,258	5,042	74,989	3,402	75,004	3,487
$\sqrt{0,1}$	80,084	26,911	75,611	13,149	75,521	15,697
1	83,842	47,311	77,294	29,242	86,152	42,361
$\sqrt{10}$	80,786	51,290	81,284	34,912	89,603	46,159

Tabulka 4: Závislost odchylek výpočtu na velikosti šumu: DESA1 5b, DESA2 5b, Mod. Kovariance 5b

f = 75 Hz	DESA1 5b		DESA2 5b		Mod. Kovariance 5b	
Směrodatná odchylka σ přidaného šumu [Hz]	Vypočtený průměrný kmitočet \bar{f} [Hz]	střední kvadratická odchylka vypočtené f [Hz]	Vypočtený průměrný kmitočet \bar{f} [Hz]	střední kvadratická odchylka vypočtené f [Hz]	Vypočtený průměrný kmitočet \bar{f} [Hz]	střední kvadratická odchylka vypočtené f [Hz]
0	75	1,095e-12	75	1,421e-14	75	1,095e-12
0,01	75,004	0,325	73,809	2,449	75,002	0,258
$\sqrt{0,001}$	75,024	1,166	72,793	4,485	74,995	0,886
0,1	75,274	3,759	71,043	7,851	74,971	2,688
$\sqrt{0,1}$	79,958	23,300	68,593	16,117	75,234	9,642
1	80,179	41,726	57,186	31,819	75,426	19,994
$\sqrt{10}$	75,053	46,746	48,346	39,475	78,188	27,710

Tabulka 5: Závislost odchylek výpočtu na velikosti šumu: Prony 5b, Derivace 2b, Derivace 3b + derivace 5b

f = 75 Hz	Prony 5b		Derivace 2b		Derivace 3b + derivace 5b	
Směrodatná odchylka σ přidaného šumu [Hz]	Vypočtený průměrný kmitočet \bar{f} [Hz]	střední kvadratická odchylka vypočtené f [Hz]	Vypočtený průměrný kmitočet \bar{f} [Hz]	střední kvadratická odchylka vypočtené f [Hz]	Vypočtený průměrný kmitočet \bar{f} [Hz]	střední kvadratická odchylka vypočtené f [Hz]
0	75	1,095e-12	74,997	0,764	74,999	0,499
0,01	75,002	0,258	74,999	0,813	75,001	0,572
$\sqrt{0,001}$	74,995	0,887	74,994	1,519	74,994	1,192
0,1	75,006	2,861	74,984	4,210	74,987	3,522
$\sqrt{0,1}$	76,236	15,358	75,049	15,618	75,008	12,447
1	84,121	37,233	77,043	31,891	64,171	34,599
$\sqrt{10}$	85,947	40,409	78,001	37,412	59,211	42,737

5.2.3 Časový průběh výpočtu okamžitého kmitočtu zašuměných signálů

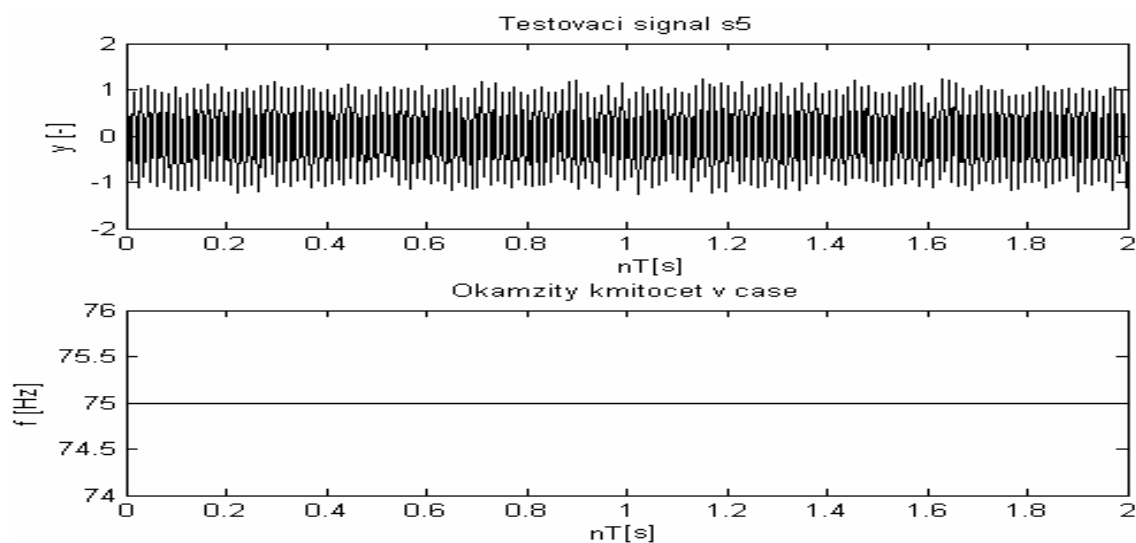
Byly vytvořeny podobné testovací signály k signálům $s_1(n)$, $s_2(n)$, $s_3(n)$, a $s_4(n)$ z kapitoly 4.1. Vytvořené signály $s_5(n)$, $s_6(n)$, $s_7(n)$ a $s_8(n)$ jsou funkce kosinus o amplitudě 1. Vzorkovací kmitočet signálů je 300 Hz ($T = 0,00\bar{3}$). Celý signál má $n = 600$ vzorků. Veličiny na osách jsou vyneseny stejně, jako v kapitole 4.1. Kmitočet každého testovacího signálu má jiný vývoj v čase:

- $s_5(n)$ má konstantní kmitočet $f = 75 \text{ Hz} = f_{vz}/4$,
- $s_6(n)$ mění kmitočet skokem z 50 Hz na 100 Hz,
- $s_7(n)$: kmitočet signálu rovnoměrně roste z nuly na 150 Hz $= f_{vz}/2$,
- $s_8(n)$: kmitočet signálu rovnoměrně klesá z 150 Hz na nulu, po dosažení minima plynule roste na konečných 150 Hz.

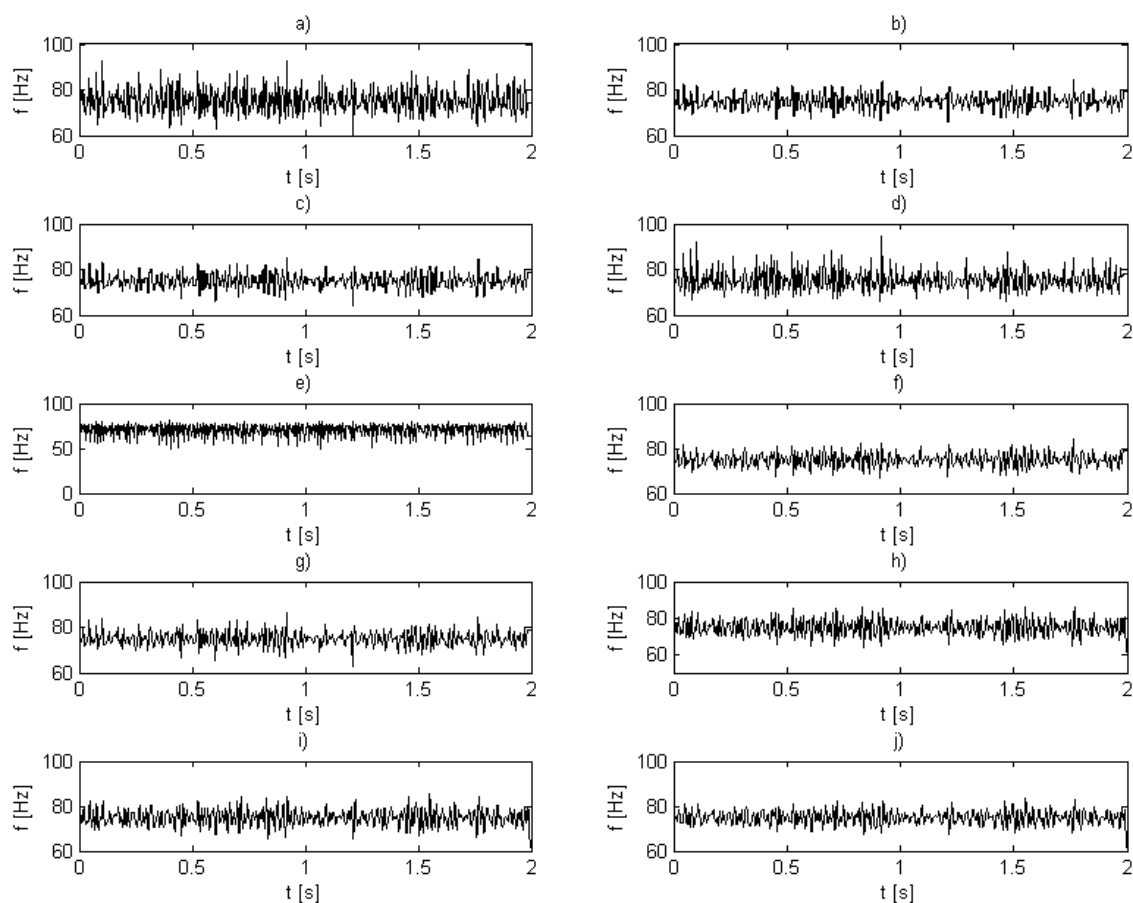
K signálům byl přičten Gaussův šum se střední hodnotou $\mu = 0$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 0,1$. Vytvořené signály byly podrobeny výpočtu dle uvažovaných metod. Na obrázcích 5.3 až 5.10 jsou ukázány testovací signály a závislosti vypočteného okamžitého kmitočtu na čase.

Signál $s_5(n)$ (obr. 5.5 a 5.6) počítají všechny metody spolehlivě, kmitočet odpovídá čtvrtině vzorkovacího kmitočtu, což je pro predikční metody nejvýhodnější. Signál $s_6(n)$ (obr. 5.5 a 5.6) je počítán nejpřesněji modifikovanou kovarianční metodou a metodami derivace fáze. Okamžitý kmitočet signálu $s_6(n)$ nejhůře počítá pětibodová DESA 2, ta změnu kmitočtu vůbec nezaregistruje. Kmitočet se změní souměrně podle $f_{vz}/4$, a

z pozorování je zřejmé, že tato metoda kmitočty nad hodnotou $f_{vz}/4$ počítá špatně. Na signálu $s_7(n)$ (obrázky 5.7 a 5.8) lze dobře pozorovat změny přesnosti výpočtu, v závislosti na měnícím se okamžitým kmitočtu signálu. U metody DESA1 (čtyřbodová) lze pozorovat velké nepřesnosti na začátku a konci časového intervalu (nízké a vysoké kmitočty). Vypočtený kmitočet nepřesáhne hodnotu maximálního kmitočtu 150 Hz. Obě metody modifikované kovarianční metody můžeme považovat za nejpřesnější. Velké odchylky od přesnosti pozorujeme na pětibodových metodách Prony a DESA 1. Čtyřbodovou Poncho metodu můžeme zhodnotit jako průměrnou. Velmi zajímavé je chování pětibodové DESA 2, po překročení kmitočtu $f_{vz}/4$ začne metoda detekovat okamžitý kmitočet jako zrcadlový k $f_{vz}/4$. A kmitočet $f_{vz}/2$ považuje za kmitočet nulový. Metody derivující okamžitou fázi se dopouštějí chyb, blíží-li se kmitočet k $f_{vz}/2$. Od hodnoty kmitočtu přibližně $0,45f_{vz}$ dochází ke skokovým změnám vypočteného kmitočtu mezi hodnotou skutečného vysokého kmitočtu a kmitočtu nulového. Při použití vícebodové derivace je četnost přeskoků redukována. Výpočet kmitočtu testovacího signálu $s_8(n)$ potvrzuje výsledky dosažené při pozorování odezvy na testovací signál $s_7(n)$.

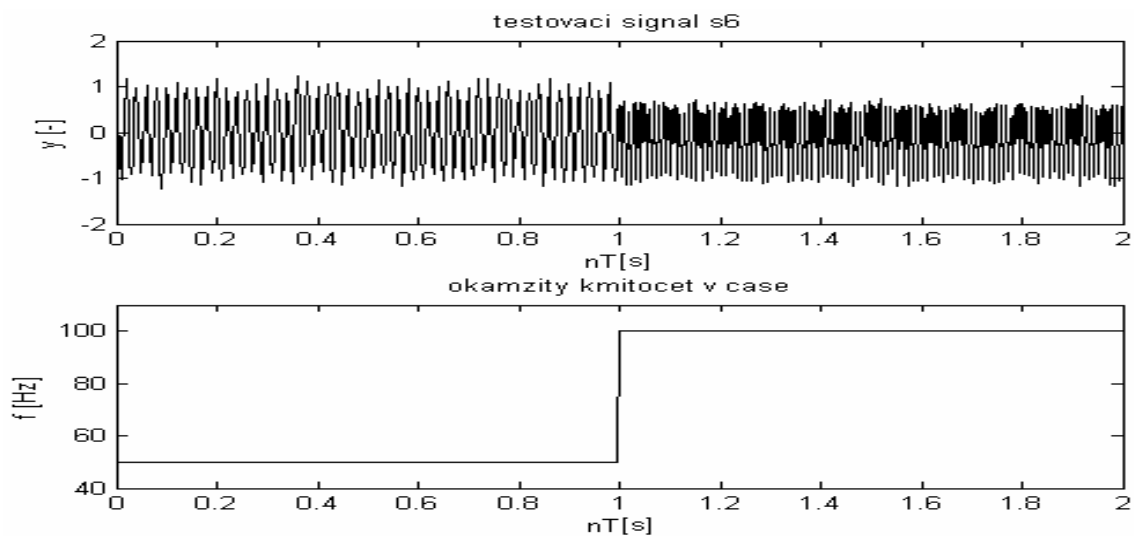


Obr. 5.3: Zašuměný testovací signál $s_5(n)$ (konstantní kmitočet)

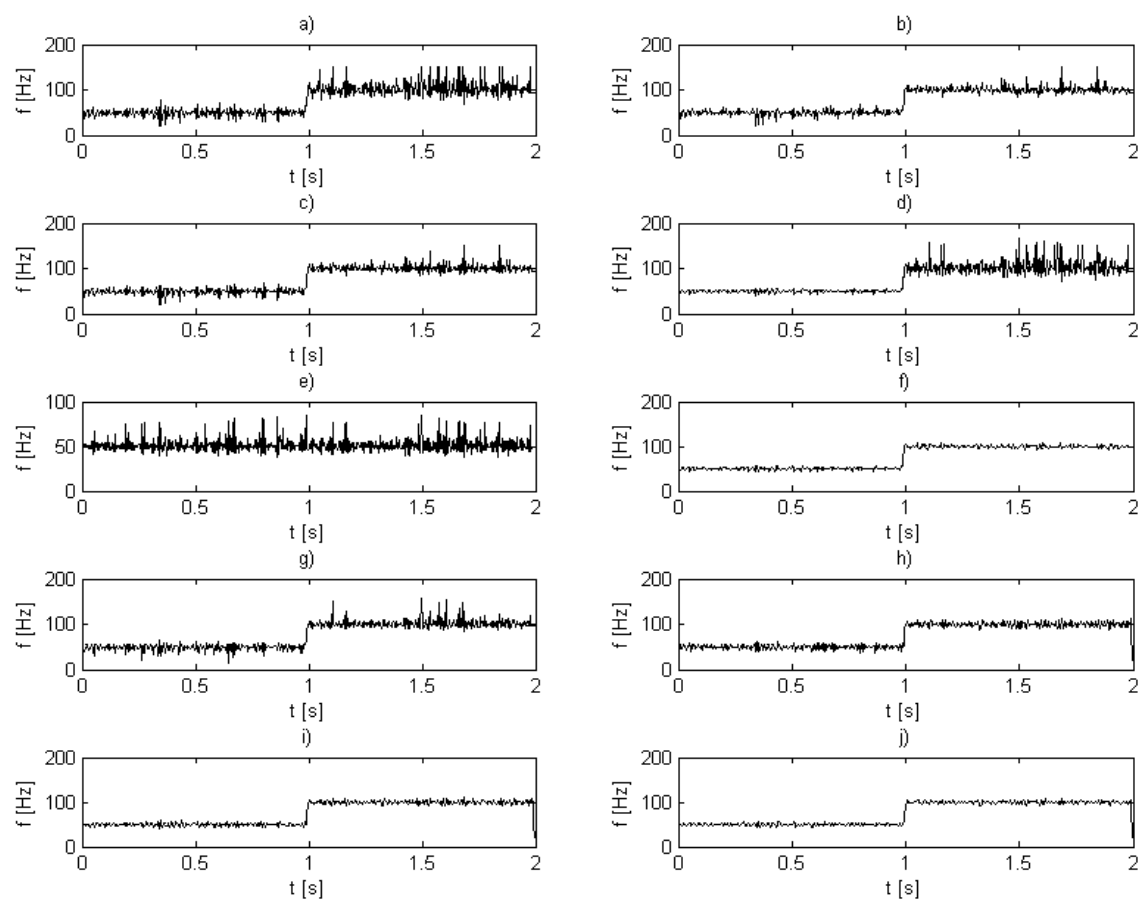


Obr. 5.4: Okamžitý kmitočet signálu $s_5(n)$ vypočtený metodami:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) DESA-1a (4body) | f) Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Mod. kovarianci (4body) | g) Mod. prony (5bodů) |
| c) Prony (4body) | h) Dvoubodovou derivaci |
| d) DESA-1 (5bodů) | i) Tříbodovou derivaci |
| e) DESA-2 (5bodů) | j) Pětibodovou derivaci |

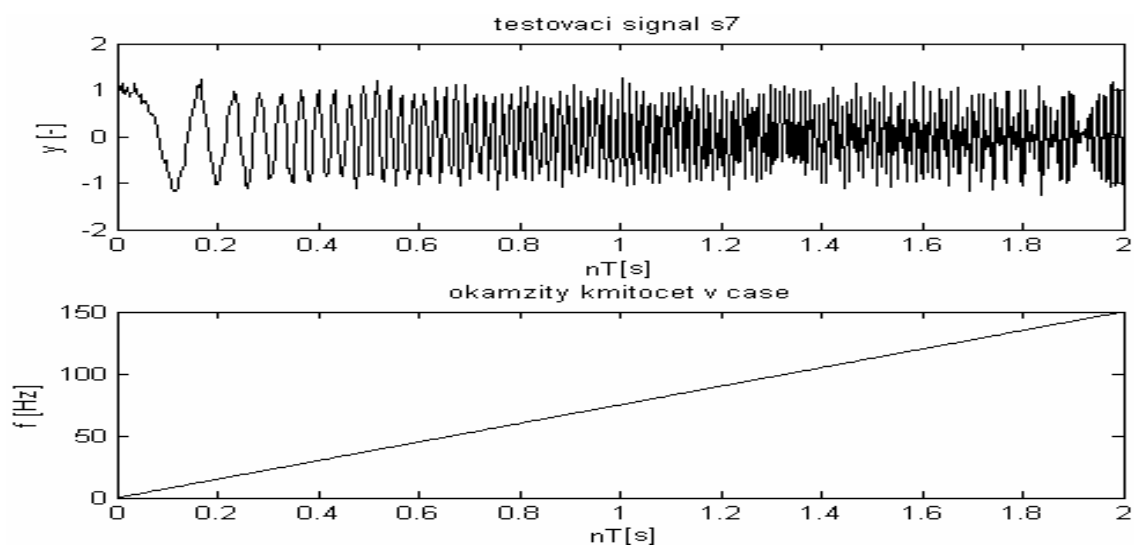


Obr. 5.5: Zašuměný testovací signál $s_6(n)$ (se skokem okamžitého kmitočtu)

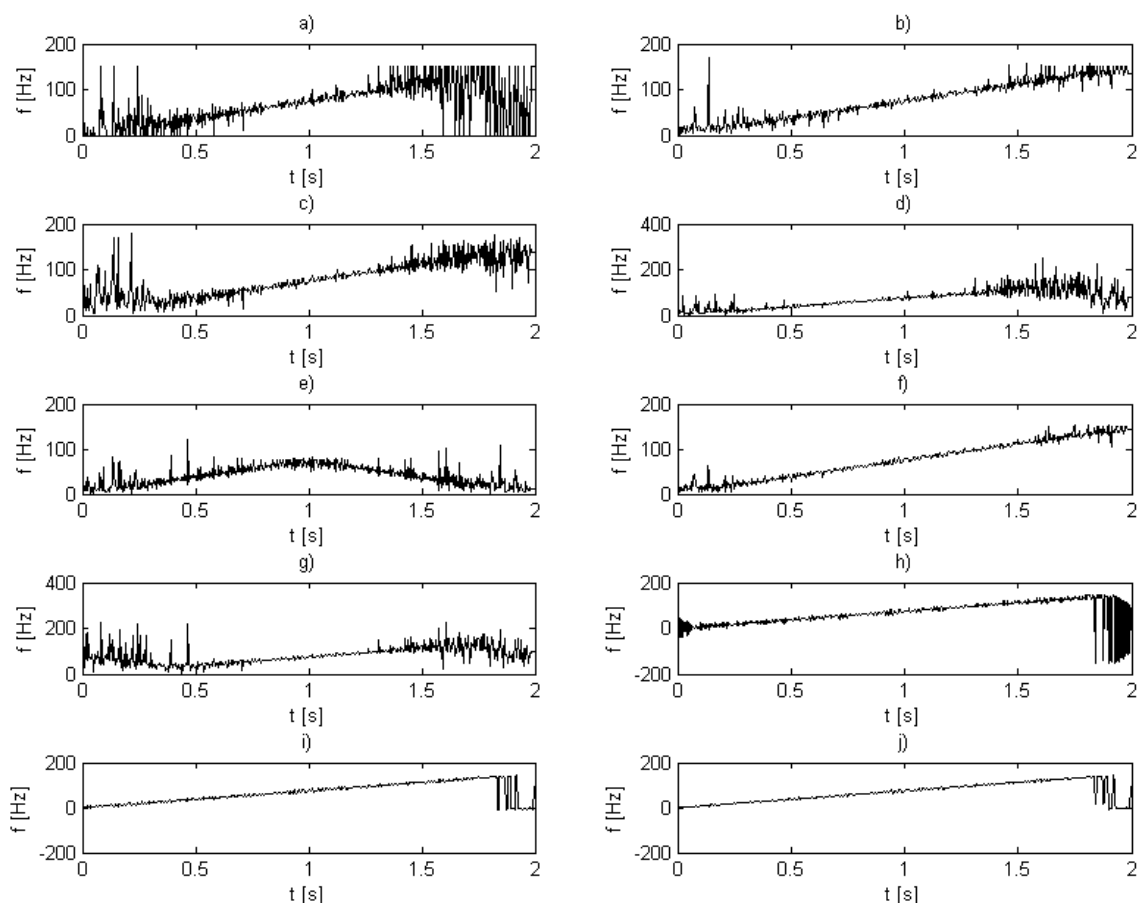


Obr. 5.6: Okamžitý kmitočet signálu $s_6(n)$ vypočtený metodami:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) DESA-1a (4body) | f) Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Mod. kovariance (4body) | g) Mod. prony (5bodů) |
| c) Prony (4body) | h) Dvoubodovou derivaci |
| d) DESA-1 (5bodů) | i) Tříbodovou derivaci |
| e) DESA-2 (5bodů) | j) Pětibodovou derivaci |

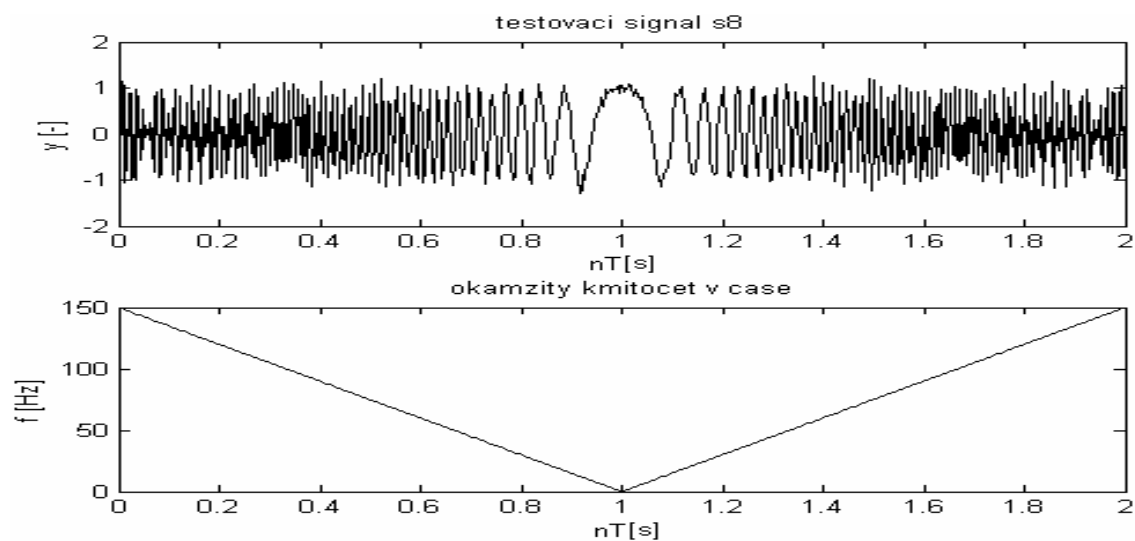


Obr. 5.7: Zašuměný testovací signál $s_7(n)$ (s rostoucím kmitočtem)

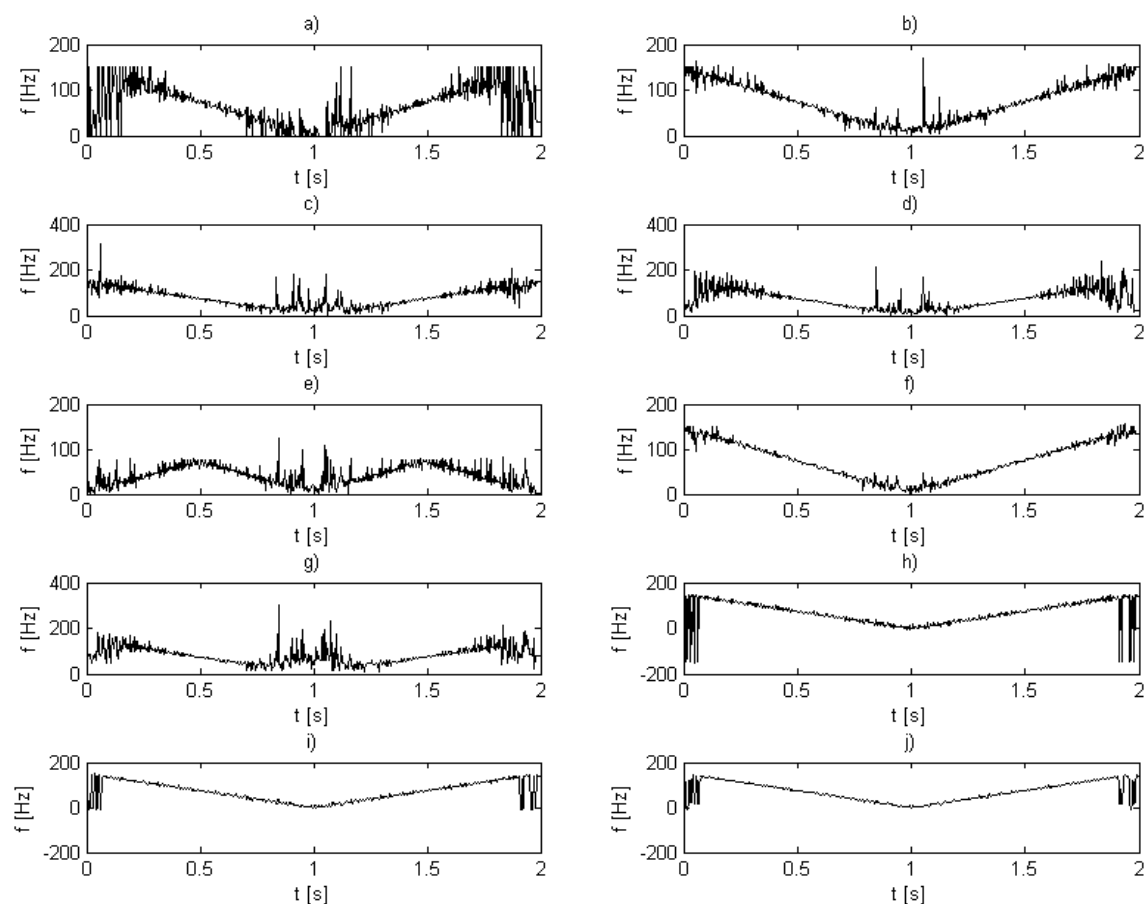


Obr. 5.8: Okamžitý kmitočet signálu $s_7(n)$ vypočtený metodami:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) DESA-1a (4body) | f) Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Mod. kovarianci (4body) | g) Mod. prony (5bodů) |
| c) Prony (4body) | h) Dvoubodovou derivaci |
| d) DESA-1 (5bodů) | i) Tříbodovou derivaci |
| e) DESA-2 (5bodů) | j) Pětibodovou derivaci |



Obr. 5.9: Zašuměný testovací signál $s_8(n)$ (s rostoucím/klesajícím kmitočtem)



Obr. 5.10: Okamžitý kmitočet signálu $s_8(n)$ vypočtený metodami:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) DESA-1a (4body) | f) Mod. kovariance (5bodů) |
| b) Mod. kovariance (4body) | g) Mod. prony (5bodů) |
| c) Prony (4body) | h) Dvoubodovou derivaci |
| d) DESA-1 (5bodů) | i) Tříbodovou derivaci |
| e) DESA-2 (5bodů) | j) Pětibodovou derivaci |

6 ZÁVĚR

Pro výpočet okamžitého kmitočtu diskrétního signálu lze použít několik metod výpočtu.

První možností je využít definičního vztahu pro okamžitý kmitočet: tedy vypočítat analytický signál a derivovat jeho okamžitou fázi. Základní nevýhodou této metody je velká výpočetní náročnost, a tedy i doba potřebná pro výpočet. To je dáno výpočtem Hilbertovy transformace a počítáním s komplexními čísly. Metoda spolehlivě počítá libovolný signál, jehož maximální kmitočet odpovídá polovině vzorkovacího kmitočtu. Odchyłky výpočtu, derivací fáze analytického signálu, jsou větší než pro ostatní metody, je-li na vstupu nezašuměný časově konstantní harmonický signál. Pokud je vstupní signál časově proměnný, přesnost výpočtu je srovnatelná s ostatními metodami a je-li vstupní signál zašuměn, patří tato metoda mezi nejpřesnější. Nevýhodou této metody je nepřesný výpočet při prudkých změnách vstupního signálu. Metoda vyžaduje určitý čas, než se vypočtená hodnota ustálí na správném kmitočtu. Totéž platí pro časový interval po zahájení výpočtu a před koncem výpočtu.

Druhá možnost jak vypočítat okamžitý kmitočet jsou nelineární metody odvozené z predikčních algoritmů. Jedná se o algoritmus DESA, který je založen na sledování okamžité energie signálu. Z této energie metoda dokáže separovat okamžitý kmitočet signálu. Další algoritmy které využívají predikčních postupů jsou metody založené na modifikované kovarianci a Pronyho metodě. Konkrétní vzorce odvozené z těchto metod byly převzaty z [1] a dělí se na čtyřbodové a pětibodové, v závislosti na tom, kolik vstupních vzorků potřebují k výpočtu hodnoty okamžitého kmitočtu. Obecně platí, že při využití většího počtu vzorků jsou výpočty přesnější, ale také náročnější. Velkou výhodou uvedených nelineárních metod je malá výpočetní náročnost. Z toho vyplývá i kratší doba výpočtu.

Z hlediska časově proměnného nezašuměného signálu lze za nejpřesnější považovat všechny metody DESA a čtyřbodovou Pronyho metodu. Je-li vstupní signál zašuměný, pak je nejvýhodnější použít metody odvozené z modifikované kovariance. Špatné vlastnosti má pětibodová Pronyho metoda, která se dopouští výrazných chyb, pokud se vstupní signál mění v okolí nulového kmitočtu. Zaměříme-li se na přesnost výpočtu uvedených metod v závislosti na poměru kmitočtu signálu a vzorkovacího kmitočtu, je spolu s derivací fáze analytického signálu nejpřesnější metoda modifikované kovariance, to lze nejlépe posoudit na zašuměném signálu. Metoda DESA-2 (5bodů) funguje jen do kmitočtu $f_{vz}/4$, není tedy vhodná pro výpočet signálů s vysokými kmitočty. Nejodolnější proti šumu je pětibodová modifikovaná kovariance.

V praxi se většinou setkáme se signály, které jsou do jisté míry ovlivněné šumem. Proto lze považovat za nejvýhodnější řešení, využití metody modifikované kovariance, popřípadě i derivace fáze analytického signálu. Záleží také na specifických vlastnostech vstupního signálu, jiná metoda může být pro konkrétní signál přesnější a výhodnější.

LITERATURA

- [1] L. B. Fertig and J. H. McClellan, *Instantaneous Frequency Estimation Using Linear Prediction With Comparisons to the DESAs*, IEEE Signal Process. Lett., vol. 3, pp. 54-56, Feb.1996.
- [2] Prof. Jiří Jan, *Číslicová filtrace analýza a restaurace signálů*, 2.upravené a rozšířené vydání, VUTUM Brno, 2002, ISBN 80-214-1558-4.
- [3] Antonín Fuksa, *Spektrální analýza vzorkovaných nestacionárních signálů: diplomová práce*. Praha : ČVUT Fakulta elektrotechnická, květen 2000. 60 s. [online]. [cit. 2008-12-3].Dostupný z WWW: < <http://www.volny.cz/aif/thesis/main.pdf> > .
- [4] Eric Chassande-Mottin, *Instantaneous frequency*, 2005-10-26, [online]. [cit. 2008-12-3].Dostupný z WWW: <<http://gdr-isis.org/tftb/tutorial/node15.html>>.
- [5] WIKIPEDIE. *Numerická derivace* [online]. [cit. 2009-2-3]. Dostupný z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Numerick%C3%A1_derivace>.
- [6] J. F. Kaiser, *On a simple algorithm to calculate the 'energy' of a signal*, in *Proc. IEEE ICASSP-90*, Albuquerque, NM, Apr. 1990, pp. 381–384.
- [7] P. Maragos, J. F. Kaiser, and T. F. Quatieri, *Energy Separation in Signal Modulations with Application to Speech Analysis*, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, pp. 3024–3051, Oct. 1993.
- [8] Gordon Smyth, *Prony Estimation*, *StatSci.org*, 2005, [online]. [cit. 2008-12-3]. Dostupný z WWW: <<http://www.statsci.org/other/prony.html> >.
- [9] Ludwig Schwardt, *Modified Covariance Method*, 2005, [online]. [cit. 2008-10-3]. Dostupný z WWW: < www.dsp.sun.ac.za/dsp833/dsp833_lecture03/node14.html >.
- [10] WIKIPEDIE. *Rozptyl (statistika)* [online]. [cit. 2008-12-3]. Dostupný z WWW: <[http://cs.wikipedia.org/wiki/Rozptyl_\(statistika\)](http://cs.wikipedia.org/wiki/Rozptyl_(statistika))>.
- [11] Gescheidtova E., Bartušek K.,Kubásek R.,Smékal Z., *Využití bank číslicových filtrů v měření okamžitého kmitočtu v NMR tomografii*, *Elektrorevue* 2003/42 - 4.12.2003, [online]. [cit. 2008-12-3]. Dostupný z WWW: < <http://www.elektrorevue.cz/clanky/03042/index.html> >.
- [12] Rektoris Karel, *Přehled užité matematiky I.*, Prométheus 2003, ISBN 9531106
- [13] WIKIPEDIE. *Náhodná veličina* [online]. [cit. 2009-5-3]. Dostupný z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/N%C3%A1hodn%C3%A1_veli%C4%8Dina>.
- [14] WIKIPEDIE. *Normální rozdělení* [online]. [cit. 2009-5-3]. Dostupný z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Norm%C3%A1ln%C3%AD_rozd%C4%9Blen%C3%AD>.

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

$x(t)$	Signál v časové oblasti
$\tilde{x}(t) = H\{x(t)\}$	Hilbertův obraz $x(t)$
$f'(x)$	Derivace funkce f s proměnnou x
X	Signál v kmitočtové oblasti
x_n	Diskrétní signál
$s_1(n), s_5(n)$	Testovací signály s konstantním kmitočtem
$s_2(n), s_6(n)$	Testovací signály (skoková změna f) vytvořeny funkcí $vco()$
$s_3(n), s_4(n), s_7(n), s_8(n)$	Testovací signály (plynulá změna f) vytvořeny funkcí $chirp()$
$f_{\text{vyp}}(i)$	Vypočtený kmitočet
$f_s(i)$	Teoretický kmitočet
\bar{f}	Průměrný kmitočet
σ	Střední kvadratická odchylka
σ	Směrodatná odchylka (parametr normálního rozdělení)
μ	Střední hodnota (parametr normálního rozdělení)
σ^2	Rozptyl
DESA	The discrete energy separation algorithm
HT	Hilbertova transformace
FT	Fourierova transformace
FFT	Rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Transform)